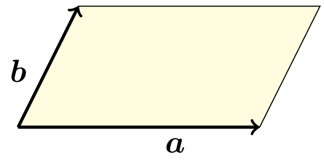
§14 行列式の図形的意味　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(平行四辺形の面積)

$\mathbf{0}$ でなく互いに平行でない平面上の 2 本のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす平行四辺形の面積 S は $S = \left|\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\right|$ で与えられることを示せ.

解 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ で表し，$\boldsymbol{a}$ の大きさを $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ で表す.



平行四辺形の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\sin\theta| = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta} &= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta)} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \left(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta\right)^2} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \quad \cdots ①.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad \cdots ②.
\end{aligned}
$$

②を①へ代入して,

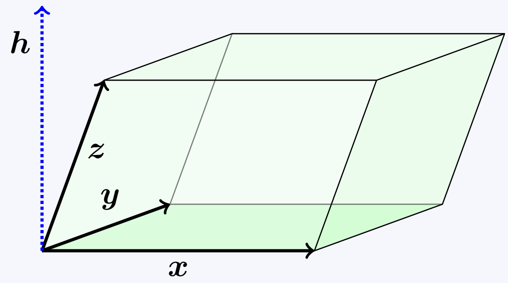
$$
S = \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_1 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\right|.
$$

∎

Check $\mathbf{0}$ でなく互いに平行でない平面上の 2 本のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を並べてできる行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ の行列式は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形の**符号つき面積**に等しい.

2 (★★★)(平行 6 面体と行列式)

空間内のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+z_3z_3$ で表し，$\boldsymbol{x}$ の大きさを $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ で表す．以下，3 本のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ で張られる下図のような平行六面体を考える．



(1) ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る底面の平行四辺形の面積 S は

$$S=\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}$$

で与えられることを示せ．

(2) 行列 M を $M:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1 & x_1 & y_1\\ z_2 & x_2 & y_2\\ z_3 & x_3 & y_3\end{pmatrix}$ で定義する．M を第 1 列目に関して余因子展開することで

$$\det M=z_1\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix}-z_2\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{pmatrix}+z_3\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}$$

を示し，$\det M=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{h}$ となるベクトル $\boldsymbol{h}$ を求めよ．また求めた $\boldsymbol{h}$ に対して，$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}=0$, $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{y}=0$ であることを確かめよ．

(3) 行列式の性質 $\det A\det B=\det(AB)$ および $\det A=\det({}^tA)$ (${}^tA$：A の転置行列) を用いて，

$$(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{h})^2=\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{z}\|^2 & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2\end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\boldsymbol{h}$ の大きさ $\|\boldsymbol{h}\|$ は S に等しいことを示せ．

(5) 図の平行六面体の体積 V は次で与えられることを示せ：

$$V=|\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{h}|=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{z}\|^2 & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2\end{pmatrix}}.$$

解 (1) 証明は $\boxed{\mathbf{1}}$ と同じであるので省略する．

(2) $M := \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ を第 1 列に関して余因子展開すると，

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{1+1} z_1 \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} z_2 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} z_3 \det \begin{pmatrix} ccx_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= z_1 \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} - z_2 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} + z_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．ゆえに,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} &:= {}^t\left(\det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= {}^t\left(\mathbf{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{y_3} \end{pmatrix}, \mathbf{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_3} & \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}, \mathbf{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

また，この $\boldsymbol{h}$ に関して,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_1x_3 - y_3x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \cancel{x_2y_3x_1} - \cancel{x_3y_2x_1} + \cancel{y_1x_3x_2} - \cancel{y_3x_1x_2} + \cancel{x_1y_2x_3} - \cancel{x_2y_1x_3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_1x_3 - y_3x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \cancel{x_2y_3y_1} - \cancel{x_3y_2y_1} + \cancel{y_1x_3y_2} - \cancel{y_3x_1y_2} + \cancel{x_1y_2y_3} - \cancel{x_2y_1y_3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって，確かに $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ である．

(3) 行列式の性質 $\det A \det B = \det(AB)$ および $\det A = \det({}^tA)$ (${}^tA$：A の転置行列) を用いれば，$(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{h})^2 = (\det M)^2 = \det({}^tMM) \quad \cdots$ ① である．ここで,

$$\begin{aligned} {}^tMM &= \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{z} \\ {}^t\boldsymbol{x} \\ {}^t\boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{z} & {}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{y} \\ {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{z} & {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \\ {}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{z} & {}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{z} & {}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ②. \end{aligned}$$

②を①へ代入すれば所望の式

$$(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{h})^2=\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{z}\|^2 & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots③$$

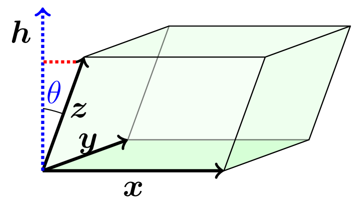
を得る．

(4) ③で $\boldsymbol{z}$ として $\boldsymbol{h}$ を代入すると $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{y}=0$ であるから，

$$(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h})^2=\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{h}\|^2 & 0 & 0\\ 0 & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\\ 0 & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2\end{pmatrix}=\|\boldsymbol{h}\|^2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2\right)=\|\boldsymbol{h}\|^2S^2.$$

したがって，$\|\boldsymbol{h}\|=S$ が示された．

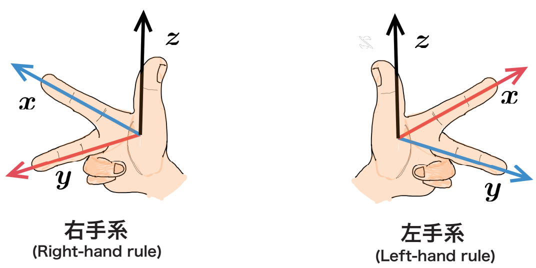
(5) $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ を $\boldsymbol{h}$ と $\boldsymbol{z}$ とのなす角とする．このとき平行六面体の体積 V は，$V=S\|\boldsymbol{z}\||\cos\theta|$ で与えられる．ここで (4) より $S=\|\boldsymbol{h}\|$ だから，③も用いると，



$$V=\|h\|\|\boldsymbol{z}\||\cos\theta|=|\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{z}|=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{z}\|^2 & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2\end{pmatrix}}.$$

∎

Memo



空間内の 3 本のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ がこの順に**右手系**をなすとは，行列式 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}>0$ が成り立つときをいい，反対にこの順に**左手系**をなすとは，行列式 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}<0$ が成り立つときをいう．

例 1 この問いの場合，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{h}\end{pmatrix}\overset{\text{列を2回入れ替える}}{=}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{h} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\|\boldsymbol{h}\|^2>0$ であるから，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{h}$ はこの順に右手系をなす．

例 2 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ はこの順に右手系をなすが，$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ はこの順に左手系をなす．

$\boxed{3}$ (★★★)(4 面体の体積と行列式)

空間内の 4 点 O$(0,0,0)$，A$(1,2,0)$，B$(-1,-1,1)$，C$(2,1,3)$ からなる四面体 OABC の体積を V とする．以下，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表す．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを $\boldsymbol{h}$ と表す．$\boldsymbol{h}$ を求めよ．

(2) V は $\dfrac{1}{6}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ に等しいことを確かめよ．

解 (1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ に対し，$\boxed{\mathbf{2}}$ -(2) によれば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル (の 1 つ) $\boldsymbol{h}$ は

$$\boldsymbol{h}:={}^t\left(\det\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\right)={}^{\boldsymbol{t}}(\mathbf{2},\mathbf{-1},\mathbf{1}).$$

(2) 四面体 OABC の体積は，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のなす平行六面体の体積の $1/6$ に等しい．ゆえに，$\boxed{\mathbf{2}}$ -(5) の結果から，

$$V=\frac{1}{6}|\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h}|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|=\mathbf{1}.$$

∎