クラメルの公式　問題１　解答

$\boxed{1}$ クラメルの公式を用いて, 次の連立１次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+4y=4 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x=\frac{1}{|A|}|\mathbf{b},\mathbf{a}_2|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}3&1\\4&4\end{vmatrix}=8,$$
$$y=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{b}|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&3\\3&4\end{vmatrix}=-5.$$

したがって, 解は $x=8,\ y=-5$.

(2) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x=\frac{1}{|A|}|\mathbf{b},\mathbf{a}_2|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&1\\0&4\end{vmatrix}=4,$$
$$y=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{b}|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&1\\3&0\end{vmatrix}=-3.$$

したがって, 解は $x=4,\ y=-3$.

(3) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -5x+3y=5 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}2&-3\\-5&3\end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-3\\-5&3\end{vmatrix}=-9$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|}\,|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2| = \frac{1}{-9}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$
$$y = \frac{1}{|A|}\,|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}| = \frac{1}{-9}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}.$$

したがって, 解は $x = -2,\ y = -\dfrac{5}{3}$.

(4) $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|}\,|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2| = \frac{1}{21}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{16}{21},$$
$$y = \frac{1}{|A|}\,|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}| = \frac{1}{21}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{19}{21}.$$

したがって, 解は $x = \dfrac{16}{21},\ y = -\dfrac{19}{21}$.

(5) $\begin{cases} 7x + 8y = 7 \\ 5x - 2y = -10 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -54$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|}\,|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2| = \frac{1}{-54}\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{11}{9},$$
$$y = \frac{1}{|A|}\,|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}| = \frac{1}{-54}\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = \frac{35}{18}.$$

したがって, 解は $x = -\dfrac{11}{9},\ y = \dfrac{35}{18}$.

$\boxed{2}$ クラメルの公式を用いて, 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 0 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|} |\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 3,$$

$$y = \frac{1}{|A|} |\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -3,$$

$$z = \frac{1}{|A|} |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

したがって, 解は $x = 3,\ y = -3,\ z = 1$.

(2) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|} |\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$y = \frac{1}{|A|} |\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$z = \frac{1}{|A|} |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}| = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

したがって, 解は $x = -1,\ y = -1,\ z = 4$.

(3) $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + z = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|}|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$z = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}| = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

したがって, 解は $x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ z = \frac{1}{2}$.

(4) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -2 \\ 2x + 2y - 5z = 3 \\ x + 5y + 2z = 6 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 112$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|}|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{112}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7},$$

$$y = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{112}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{9}{7},$$

$$z = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}| = \frac{1}{112}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}.$$

したがって, 解は $x = -\frac{1}{7},\ y = \frac{9}{7},\ z = -\frac{1}{7}$.

(5) $\begin{cases} x - 9y + 7z = 11 \\ 10x + 7y + 2z = -3 \\ 3x + 3y + z = 3 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 10 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 10 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 100$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$x = \frac{1}{|A|} |\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} 11 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{5},$$

$$y = \frac{1}{|A|} |\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3| = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} 1 & 11 & 7 \\ 10 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{11}{5},$$

$$z = \frac{1}{|A|} |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}| = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 11 \\ 10 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{24}{5}.$$

したがって, 解は $x = -\dfrac{14}{5},\ y = \dfrac{11}{5},\ z = \dfrac{24}{5}$.

$\boxed{3}$ クラメルの公式を用いて, 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} -w+x+y+z=-3 \\ w-x+y+z=2 \\ w+x-y+z=-5 \\ w+x+y-z=6 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\\6\end{pmatrix}, A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4)=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=-16$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$w=\frac{1}{|A|}|\mathbf{b},\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4|=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}-3&1&1&1\\2&-1&1&1\\-5&1&-1&1\\6&1&1&-1\end{vmatrix}=\frac{3}{2},$$

$$x=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4|=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}-1&-3&1&1\\1&2&1&1\\1&-5&-1&1\\1&6&1&-1\end{vmatrix}=-1,$$

$$y=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{a}_4|=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}-1&1&-3&1\\1&-1&2&1\\1&1&-5&1\\1&1&6&-1\end{vmatrix}=\frac{5}{2},$$

$$z=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}|=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}-1&1&1&-3\\1&-1&1&2\\1&1&-1&-5\\1&1&1&6\end{vmatrix}=-3.$$

したがって, 解は $w=\frac{3}{2},\ x=-1,\ y=\frac{5}{2},\ z=-3.$

(2) $\begin{cases} w+x=1 \\ 2w+3x=-1 \\ -w-x+3y+2z=-1 \\ -w+2x+4y+3z=1 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&3&0&0\\-1&-1&3&2\\-1&2&4&3\end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&3&0&0\\-1&-1&3&2\\-1&2&4&3\end{vmatrix}=1$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$w=\frac{1}{|A|}|\mathbf{b},\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\-1&3&0&0\\-1&-1&3&2\\1&2&4&3\end{vmatrix}=4,$$

$$x=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&-1&0&0\\-1&-1&3&2\\-1&1&4&3\end{vmatrix}=-3,$$

$$y=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{a}_4|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\2&3&-1&0\\-1&-1&-1&2\\-1&2&1&3\end{vmatrix}=-22,$$

$$z=\frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}|=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1&1&0&1\\2&3&0&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&2&4&1\end{vmatrix}=33.$$

したがって, 解は $w=4,\ x=-3,\ y=-22,\ z=33.$

(3) $\begin{cases}3w+2x+y=1\\3x+2y+z=2\\w+2x+3y=3\\x+2y+3z=4\end{cases}$

[解]: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4)=\begin{pmatrix}3&2&1&0\\0&3&2&1\\1&2&3&0\\0&1&2&3\end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&1&0\\0&3&2&1\\1&2&3&0\\0&1&2&3\end{vmatrix}=48$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$w = \frac{1}{|A|}|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4| = \frac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6},$$

$$x = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4| = \frac{1}{48}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3},$$

$$y = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4| = \frac{1}{48}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{6},$$

$$z = \frac{1}{|A|}|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}| = \frac{1}{48}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$$

したがって, 解は $w = \dfrac{1}{6},\ x = -\dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{7}{6},\ z = \dfrac{2}{3}.$

(4) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ w + y + 2z = 6 \\ 2w + x + z = 12 \\ 3w + 2x + y = 18 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}, A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$w = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\right| = \frac{1}{-12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 0 & 1 \\ 18 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{17}{3},$$

$$x = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\right| = \frac{1}{-12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \\ 3 & 18 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4\right| = \frac{1}{-12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 2 & 18 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$z = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}\right| = \frac{1}{-12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

したがって, 解は $w = \dfrac{17}{3},\ x = \dfrac{1}{2},\ y = 0,\ z = \dfrac{1}{6}$.

(5) $\begin{cases} w - 2x + 3y - 2z = 4 \\ 2w + 3x + y + 7z = -3 \\ -2w + 5x - 3y + z = 5 \\ 4w - x - y + 5z = -7 \end{cases}$

[解]: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ とおく. A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -204$$

となり, A は正則である. このときクラメルの公式より,

$$w = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\right| = \frac{1}{-204}\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{39}{17},$$

$$x = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\right| = \frac{1}{-204}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & -7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{50}{17},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4\right| = \frac{1}{-204}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -2 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = \frac{15}{17},$$

$$z = \frac{1}{|A|}\left|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}\right| = \frac{1}{-204}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{42}{17}.$$

したがって, 解は $w = \dfrac{39}{17},\ x = \dfrac{50}{17},\ y = \dfrac{15}{17},\ z = -\dfrac{42}{17}$.