行列式の展開：Vandermonde の行列式を計算する

以下の行列式は，Vandermonde（ヴァンデルモンド）の行列式と呼ばれる．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{†}$$

左辺は $n \times n$ 行列の行列式であり，その成分は n 個の変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ を用いて記述される．また右辺は $1 \leq i < j \leq n$ なる正の整数の組 (i, j) 全てについての変数の差 $(x_j - x_i)$ の積をとったものである．$n = 1$ の場合には式 (†) は両辺が 1 となって明らかに成り立ち，$n = 2$ の場合には式 (†) は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

となる．

問題 1. 式 (†) で $n = 3$ とした場合の式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

を示せ．

以下の手順に沿って，$n \geq 1$ について式 (†) を証明してみよう．

問題 2. $n \geq 2$ とする．式 (†) の左辺の行列に第 $2, 3, \ldots, n$ 列から第 1 列を引く操作を行うことにより，等式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

問題 3. n に関する数学的帰納法を用いて，$n \geq 1$ について式 (†) を示せ．