# §10 行列式の展開　演習問題 2

**✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★**

## 1 (★★★)(**行列式の漸化式**)

$x$ を実数とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対し，数列 $\{D_n\}_{n \geqq 1}$ を

$$D_n := \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

で定義する．ここに，

$$D_1 = 1 + x^2,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

である．

(1) $D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2})\ \ (n \geqq 3)$ を示せ．

(2) $D_n$ を求めよ．

## 2 (★★★)(**Cauchy の平均値の定理**)

$f(x), g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続かつ $a < x < b$ で微分可能とする．$a \leqq x \leqq b$ に対して，

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して，$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$ が成り立つことを示せ．

✐**ヒント**：第 1 行に関する余因子展開と Rolle の定理を用いる．

(2) すべての $x \in (a, b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ のとき，ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つことを示せ．これを **Cauchy の平均値の定理**という．

**3** (★★★)(**Vandermonde**（ヴァンデルモンド）**の行列式**)

つぎの行列式を求めよ：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$