行列式の展開：Vandermonde の行列式を計算する（解答）

以下の行列式は，Vandermonde（ヴァンデルモンド）の行列式と呼ばれる．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) \qquad (\dagger)$$

左辺は $n \times n$ 行列の行列式であり，その成分は n 個の変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ を用いて記述される．また右辺は $1 \le i < j \le n$ なる正の整数の組 (i, j) 全てについての変数の差 $(x_j - x_i)$ の積をとったものである．$n = 1$ の場合には式 $(\dagger)$ は両辺が 1 となって明らかに成り立ち，$n = 2$ の場合には式 $(\dagger)$ は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

となる．

問題 1. 式 $(\dagger)$ で $n = 3$ とした場合の式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

を示せ．

解答 1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 - 1 \cdot x_3 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_3 \cdot x_1^2 - 1 \cdot x_1 \cdot x_3^2 + 1 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 1 \cdot x_2 \cdot x_1^2 \\ &= x_2x_3^2 - x_2^2x_3 + x_1^2x_3 - x_1x_3^2 + x_1x_2^2 - x_1^2x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ &= (x_2 - x_1)(x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_1x_2) \\ &= x_2x_3^2 - x_2^2x_3 - x_1x_2x_3 + x_1x_2^2 - x_1x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_1^2x_3 - x_1^2x_2 \\ &= x_2x_3^2 - x_2^2x_3 + x_1x_2^2 - x_1x_3^2 + x_1^2x_3 - x_1^2x_2 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

□

以下の手順に沿って，$n \ge 1$ について式 $(\dagger)$ が成り立つことを証明してみよう．

問題 2. $n \geq 2$ とする．式 (†) の左辺の行列に第 $2, 3, \ldots, n$ 列から第 1 列を引く操作を行うことにより，等式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

解答 2.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} \text{第 } 2, 3, \ldots, n \text{ 列から} \\ \text{第 1 列を引いた} \end{array} \right) \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&\quad \left(\begin{array}{c} \text{第 } n-1 \text{ 行から第 } n-2 \text{ 行の } x_1 \text{倍を引く操作,} \\ \ldots, \text{第 3 行から第 2 行の } x_1 \text{倍を引く操作,} \\ \text{第 2 行から第 1 行の } x_1 \text{倍を引く操作を順に行った} \end{array} \right) \\
&= \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

□

問題 3. n に関する数学的帰納法を用いて，$n \geq 1$ について式 (†) が成り立つことを示せ.

解答 3. $n = 1$ の場合には，式 (†) の両辺が 1 となるから式 (†) は明らかに成り立つ．$n \geq 2$ とし，n がより小さい場合には式 (†) が成り立つと仮定する．このとき，問題 2 で示した式と帰納法

の仮定を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \times \prod_{2 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$$

となり，n についても式 (†) が成り立つことがわかる．よって，数学的帰納法により $n \geq 1$ について式 (†) が成り立つ． □