§10 行列式の展開　演習問題２　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★★)(行列式の漸化式)

x を実数とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対し，数列 $\{D_n\}_{n \geqq 1}$ を

$$D_n := \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

で定義する．ここに，

$$D_1 = 1+x^2,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

である．

(1) $D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2})$ $(n \geqq 3)$ を示せ．

(2) D_n を求めよ．

解 D_n を 1 行目に関して余因子展開することをイメージする：

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

したがって，実際に 1 行目に関して余因子展開すると

$$D_n = (-1)^{1+1}(1+x^2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-1\text{個}}$$

$$
+(-1)^{1+2}x\underbrace{\begin{vmatrix} x & x & 0 & & \\ 0 & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-1\text{個}}
$$

$$
=(1+x^2)D_{n-1}-x\begin{vmatrix} x & x & 0 & & \\ 0 & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots ①.
$$

ここで，①の第 2 項の行列式について，

$$
\begin{vmatrix} x & x & 0 & & \\ 0 & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{1列目に関して}\\\text{余因子展開}}}{=} (-1)^{1+1}x\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & \text{\huge 0} \\ & x & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+x^2 & x \\ & \text{\huge 0} & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-2\text{個}}
$$

1 行目で余因子展開すると少し分かりにくい

$$
=xD_{n-2} \quad \cdots\cdots ②.
$$

②を①へ代入すると，

$$
D_n=(1+x^2)D_{n-1}-x^2D_{n-2} \iff D_n-D_{n-1}=x^2(D_{n-1}-D_{n-2}) \ \ (n \geqq 3).
$$

(2)　(1) より数列 $\{D_n-D_{n-1}\}_{n\geqq 2}$ は公比 x^2 の等比数列であるから，

$$
D_n-D_{n-1}=(x^2)^{n-2}(D_2-D_1).
$$

ここで $D_1=1+x^2$，$D_2=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix}=(1+x^2)^2-x^2=1+x^2+x^4$ であるから，

$$
D_n-D_{n-1}=(x^2)^{n-2}x^4=x^{2n}.
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
D_n &= x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^4+D_1 \\
&= \boldsymbol{x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^4+x^2+1}.
\end{aligned}
$$

∎

$\boxed{2}$ (★★★)(Cauchy の平均値の定理)

$f(x), g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続かつ $a < x < b$ で微分可能とする．$a \leqq x \leqq b$ に対して，

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して，$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$ が成り立つことを示せ．

✐**ヒント**：第 1 行に関する余因子展開と Rolle の定理を用いる．

(2) すべての $x \in (a, b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ のとき，ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つことを示せ．これを **Cauchy の平均値の定理**という．

解 (1)　まず，$F(x)$ が $a < x < b$ で微分可能であることを示す．$F(x)$ を 1 行目に関して余因子展開すると，

$$F(x) = (-1)^{1+1} f(x) \begin{vmatrix} g(a) & 1 \\ g(b) & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} g(x) \begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$$

であり，$f(x), g(x)$ はともに $a < x < b$ で微分可能であるから $F(x)$ も微分可能．この両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-1)^{1+1} f'(x) \begin{vmatrix} g(a) & 1 \\ g(b) & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} g'(x) \begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

が得られる．一方，$F(a) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$ ($\because$ 1行目と2行目が等しい) であり，$F(b) = \begin{vmatrix} f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$ ($\because$ 1行目と3行目が等しい) であるから，Rolle の定理より，ある実数

$c \in (a,b)$ が存在して $F'(c) = 0$ が成り立つ．したがって，①と合わせて

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(2)　①の導出過程から

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (-1)^{1+1} f'(c) \begin{vmatrix} g(a) & 1 \\ g(b) & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} g'(c) \begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff f'(c)(g(a) - g(b)) - g'(c)(f(a) - g(a)) = 0 \quad \cdots\cdots ②.$$

$g'(x)$ は $a < x < b$ で 0 にならないから，$g'(c) \neq 0$ であり，同時に $g(a) - g(b) \neq 0 \cdots$ ③ が従う．実際，③が成り立たないと仮定すると，$g(a) = g(b)$ だから再び Rolle の定理によって，ある実数 $\tilde{c} \in (a,b)$ が存在して $g'(\tilde{c}) = 0$ となるが，これは $g'(x) \neq 0$ $(a < \forall x < b)$ に矛盾する．したがって，②の両辺を $g'(c)(g(a) - g(b))$ で割ると

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

■

3 (★★★)(Vandermonde（ヴァンデルモンド）の行列式)

つぎの行列式を求めよ：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解　求める行列式は，与えられた形から Vandermonde の行列式だから，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (j - i)$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{2 \leqq j \leqq n} (j-1) \right)}_{=(n-1)!} \underbrace{\left(\prod_{3 \leqq j \leqq n} (j-2) \right)}_{=(n-2)!} \cdots \underbrace{\left(\prod_{n-1 \leqq j \leqq n} (j-(n-2)) \right)}_{=2!}$$

$$= \boldsymbol{(n-1)!(n-2)!\cdots 2!} \ \left(= (n-1)(n-2)^2 \cdots 2^{n-1} \right)$$

■

Check

ヴァンデルモンド
Vandermonde の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)$$

ここに，記号 $\displaystyle\prod_{1 \leqq i<j \leqq n} (x_j - x_i)$ は $(x_j - x_i)$ のすべての $1 \leqq i < j \leqq n$ にわたる積を表す．