§10 行列式の展開　演習問題1　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(余因子展開 1)

次の行列式を余因子展開を用いて求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

解 (1)　0 が多く並ぶ第 1 行に関して余因子展開したほうが効率よく計算できる．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{21}.$$

(2)　0 が多く並ぶ第 2 列に関して余因子展開したほうが効率よく計算できる．

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = (-7)(-5) = \mathbf{35}.$$

(3)　0 が多く並ぶ第 1 行に関して余因子展開したほうが効率よく計算できる．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}4\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{60}.$$

(4)　0 を含む第 3 行 (or 第 3 列) に関して余因子展開したほうが効率よく計算できる．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}
&= (-1)^{3+1}\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&\quad +(-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta\cdot r^2\cos\theta\sin\theta + r\sin\theta\cdot r\sin^2\theta \\
&= \boldsymbol{r^2\sin\theta}.
\end{aligned}$$

■

【コメント】(4) の行列式は，3 次元極座標変換

$$(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \quad (\text{ただし，} r > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

に対する Jacobian（ヤコビアン）

$$\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} (= r^2\sin\theta)$$

である．Jacobian は例えば，3 重積分 $\iiint_D f(x, y, z)\,dxdydz$ を極座標変換を用いて求める際にたびたび登場する．

2 (★★☆)(余因子展開 2)

次の行列式を余因子展開を用いて求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解 (1)　0 が多く並ぶ第 2 行に関して余因子展開したほうが効率よく計算できる．

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =: -3|B| \cdots ①$$

ここで，$|B| := \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ とおいた．さらに行列式 $|B|$ について，第 2 行に関する余因子展開を考えれば，

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \cdots ②$$

②を①へ代入して，

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-8) = \mathbf{24}.$$

(2)　0 が多く並ぶ第 3 列に関して余因子展開したほうが効率よく計算できる．

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =: 3|C| \cdots ①$$

ここで，$|C| := \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ とおいた．さらに，行列式 $|C|$ について，第 2 列に関する余因子展開を考えると

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdots ②$$

②を①へ代入して，

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) = \mathbf{-12}.$$

∎

3 (★★☆)(文字を含む余因子展開 1)

行列の基本性質と余因子展開を用いて，次の行列式を因数分解せよ．ただし，a, b, c はすべて実数とする．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

解 (1)　等号の上に用いた行列の基本変形および余因子展開を記す．以下 (2),(3) も同様である．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{(-1)\times 1\text{行目を2行目}\\ \text{3行目に加える}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{1列目に関する}\\ \text{余因子展開}}}{=} (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{共通因数}(b-a),(c-a)\\ \text{で括り出す}}}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \overset{\substack{(-1)\times 1\text{列目を}2\text{列目} \\ 3\text{列目に加える}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{1\text{行目に関する} \\ \text{余因子展開}}}{=} (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{共通因数}(a-b),(c-a) \\ \text{で括り出す}}}{=} (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & -b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a)(b-c)$$

$$= \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \overset{\substack{(-1)\times 2\text{行目},3\text{行目を} \\ 1\text{行目に加える}}}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{共通因数}a+b+c \\ \text{で括り出す}}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)\times 1\text{列目を}2\text{列目} \\ 3\text{列目に加える}}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \\ c & a-c & b-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{1\text{行目に関して} \\ \text{余因子展開}}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} c-b & a-b \\ ba-c & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\{-(b-c)^2 - (a-b)(a-c)\}$$

$$= \boldsymbol{-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}.$$

$\blacksquare$

4 (★★☆)(文字を含む余因子展開 2)

行列の基本性質と余因子展開を用いて，次の行列式を因数分解せよ．ただし，x, a, b はすべて実数とする．

(1) $\begin{vmatrix} 101 & 105 & 104 & 103 \\ 102 & 101 & 105 & 104 \\ 103 & 102 & 101 & 105 \\ 104 & 103 & 102 & 101 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$

解 (1)　等号の上に用いた行列の基本変形および余因子展開を記す. 以下 (2),(3) も同様である.

$$\begin{vmatrix} 101 & 105 & 104 & 103 \\ 102 & 101 & 105 & 104 \\ 103 & 102 & 101 & 105 \\ 104 & 103 & 102 & 101 \end{vmatrix} \overset{\substack{(-1)\times 1\text{列目を}2\text{列目から} \\ 4\text{列目に加える}}}{=} \begin{vmatrix} 101 & 4 & 3 & 2 \\ 102 & -1 & 3 & 2 \\ 103 & -1 & -2 & 2 \\ 104 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)\times 1\text{行目を}2\text{行目から} \\ 4\text{行目に加える}}}{=} \begin{vmatrix} 101 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \\ 3 & -5 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)\times 4\text{列目を}2\text{列目} \\ 4\text{列目に加える}}}{=} \begin{vmatrix} 101 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

4 列目で余因子展開してもよい

$$\overset{\substack{4\text{行目に関する} \\ \text{余因子展開}}}{=} (-1)^{4+1}1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+4}(-5) \begin{vmatrix} 101 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=: -3|A| - 5|B| \quad \cdots ①.$$

ここに，

$$|A| := \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}, \qquad |B| := \begin{vmatrix} 101 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

とおいた．

・$|A|$ について：第 2 行に関する余因子展開を考えれば，

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 50 \cdots ②$$

・$|B|$ について：再び第 2 行に関する余因子展開を考えれば，

$$|C| = \begin{vmatrix} 101 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-5)\begin{vmatrix} 101 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= 5 + 2535 = 2540 \cdots ③$$

①, ②, ③より，

$$\begin{vmatrix} 101 & 105 & 104 & 103 \\ 102 & 101 & 105 & 104 \\ 103 & 102 & 101 & 105 \\ 104 & 103 & 102 & 101 \end{vmatrix} = -3 \cdot 50 - 5 \cdot 2540 = \mathbf{-12850}.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{2\times2\text{列目を1列目に加える}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2x-3 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

4 列目 or 4 行目で余因子展開してもよい

$$\overset{\substack{\text{1行目に関する}\\\text{余因子展開}}}{=} (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 2x-3 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{x\times\text{3列目を}\\\text{2列目へ加える}}}{=} \begin{vmatrix} 2x-3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & x^2 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{2行目に関する}\\\text{余因子展開}}}{=} (-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix} 2x-3 & -1 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(2x-3) + 1$$

$$= \boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 1}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{2列目に他の列} \\ \text{すべて加える}}}{=} \begin{vmatrix} 4a+b & a & a & a \\ 4a+b & a & a & a \\ 4a+b & a & a & a \\ 4a+b & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{共通因数}4a+b\text{で} \\ \text{括り出す}}}{=} (4a+b) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+b & a & a \\ 1 & a & a+b & a \\ 1 & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)\times 1\text{列目を} \\ \text{他の列すべてに加える}}}{=} (4a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

4 列目 or 4 行目で余因子展開してもよい

$$\overset{\substack{\text{1行目に関する} \\ \text{余因子展開}}}{=} (4a+b)(-1)^{1+1}1 \underbrace{\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}}_{=b^3}$$

$$= \boldsymbol{(4a+b)b^3}.$$

$\blacksquare$