行列の定義と働き　演習問題２　解答例

m と n を自然数とする．mn 個の実数

$$a_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2\ldots,n)^{*1}$$

を $m\times n$ の長方形状に並べて [ ] で括った

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を $\boldsymbol{m}$ **行** $\boldsymbol{n}$ **列の行列**，もしくは $\boldsymbol{m\times n}$ **行列**という．本によっては [ ] は丸括弧 ( ) であることも多い．

- 上から i 番目の横の実数の並び $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ をその行列の**第** $\boldsymbol{i}$ **行**といい，左から j 番目の縦の実数の並び $a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}$ をその行列の**第** $\boldsymbol{j}$ **列**という．
- 各実数 a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$ をその行列の**成分**という．とくに第 i 行と第 j 列が交わる位置の成分 a_{ij} を，その行列の $\boldsymbol{(i,j)}$ **成分**という．

以上を踏まえた上で，以下の問に答えよ．

問 1. 3×5 行列

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & \sqrt{5} & 1/3 \\ -1 & 2 & 6 & -2/5 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

に対して，以下の問に答えよ．

(i) 第 2 行を答えよ．

解答. 第 2 行とは，その行列の上から 2 番目の横の実数の並びであったから，$-1,2,6,-2/5,10$ である．

(ii) 第 4 列を答えよ．

解答. 第 4 列とは，その行列の左から 4 番目の縦の実数の並びであったから，$\sqrt{5},-2/5,-2$ である．

(iii) $(2,4)$ 成分を答えよ．

解答. $(2,4)$ 成分とは，その行列の第 2 行と第 4 列の交わりの位置にある成分のことであったから，$-2/5$ である．

[*1] ここでは mn 個の実数を 1 ～ mn までの番号をつけて $a_1,a_2,\ldots,a_{mn}$ と表しているわけではなく，後の都合のために 1 から m まで動く i と 1 から n まで動く j という 2 種類の添字を用いて，$a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ と表している．言い換えれば $\{a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}\},\{a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}\},\ldots\ldots,\{a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn}\}$ という n 個の実数でできた組が m 組あると考えればよい．後にわかるように，行列の各 (i,j) 成分を a_{ij} と表している．

問 2. 3×2 行列であって，各 (i, j) 成分が $2i + j$ であるような行列を求めよ．

解答. 求める行列の (i, j) 成分を a_{ij} とおく $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2)$．各 (i, j) 成分が $2i + j$ であるような行列であるから，まず $a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ とわかる．同様にして

$$a_{12} = 2{\cdot}1{+}2 = 4, \quad a_{21} = 2{\cdot}2{+}1 = 5, \quad a_{22} = 2{\cdot}2{+}2 = 6, \quad a_{31} = 2{\cdot}3{+}1 = 7, \quad a_{32} = 2{\cdot}3{+}2 = 8$$

とわかるから，求める行列は

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

問 3. 2×4 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して，各 i 行を i 列に並べてできる 4×2 行列を答えよ[*2].

解答. 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

の第 1 行 $1, 0, -3, 4$ を第 1 列に，第 2 行 $0, 2, 2, 0$ を第 2 列に並べてできる行列を答えればよいので，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

[*2] 一般に $m \times n$ 行列に対して，各 i 行を i 列に並べてできる $n \times m$ 行列を元の行列の**転置行列**という．