

§4 ベイズ推論 演習問題

📖 問題の難易度の目安【易】☆☆☆ 【基礎】★★☆ 【標準】★★★

1 (☆☆☆)(条件付き確率①)

(ジョーカーを除く)52枚のトランプから無作為に1枚カードを選ぶとき、

♠ : スペードのカード, J, Q, K : 絵札

とするとき、条件付き確率 $\mathbb{P}[\text{J, Q, K} \mid \text{♠}]$ を求めよ。

2 (☆☆☆)(条件付き確率②)

5回に1回の割合で帽子を忘れる癖のあるK君が、正月にA, B, Cの3軒をこの順に年始回りして家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた。2軒目の家Bに忘れてきた確率を求めよ。

3 (☆☆☆)(全確率の公式)

標本空間を Ω とし、事象 A_1, \dots, A_n は互いに排反 (すなわち、 $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$) であり、 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ を満たすとする。このとき任意の事象 B に対して、

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] \mathbb{P}[B \mid A_i]$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\mathbb{P}[B \mid A_i]$ は事象 A_i の下での B の条件付き確率を表す。

4 (☆☆☆)(ベイズの定理)

標本空間を Ω とし、事象 A_1, \dots, A_n は互いに排反で $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ を満たすとする。このとき任意の事象 B に対して、

$$\mathbb{P}[A_k \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A_k] \mathbb{P}[B \mid A_k]}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] \mathbb{P}[B \mid A_i]}, \quad k = 1, \dots, n$$

が成り立つことを示せ。

5 (★★☆)(ベイズの定理の応用①)

ある試験において、初めての受験者の合格率が35%、2回目以上の受験者の合格率が70%であった。受験者比率は1回目の人が40%、2回目以上の人60%であった。これらのことから、合格者のうち初めての受験者の比率を求めよ。また、全体の合格率を求めよ。

6 (★★☆)(ベイズの定理の応用②)

ある感染症 V の検査 T があり、検査 T は感染者の75%に陽性反応、非感染者の99%に陰性反応が出るものとする。また、被験者全体のうち、感染者であるという事象を V 、非感染者である事象を V^c とおく。また、被験者のうちで、検査 T によって陽性反応が出たという事象を T_+ 、陰性反応が出たという事象を T_- とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\mathbb{P}[V] = p$ とおくとき、陽性反応が出た人が実際に感染者である (真に陽性) である確率 $f(p)$ を求めよ。
- (2) $f(p)$ の挙動を調べることで、検査 T について分かることを簡潔に述べよ。特に、感染症が新型の場合における検査 T の実施方法について一つの考え方を述べよ。
- (3) 陰性反応が出た人が実際に非感染者である (真に陰性) である確率を $g(p)$ を求めよ。

7 (★★☆)(ベイズの定理の応用③)

以下の表では、“タダ”や“アタリ”という単語を含むメールが迷惑メールか判定し、表としてまとめたデータである。1行目、2行目の“タダ”や“アタリ”という単語を含む場合には○を入れ、そうでない場合には×を記入している。3行目は、実際に迷惑メールかどうかを確認し、スパムであれば○、そうでない場合には×を記入している。迷惑メールである確率を $\mathbb{P}[\text{spam}]$ とする。

“タダ”	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×
“アタリ”	○	×	○	×	×	○	×	×	×	○
迷惑メール (spam)	○	○	○	×	×	×	×	○	×	×

“タダ”を含むメールである事象を free ，“アタリ”を含むメールである事象を win とし、迷惑メールに対し free と win は互いに独立、すなわち

$$\mathbb{P}[\text{free} \cap \text{win} \mid \text{spam}] = \mathbb{P}[\text{free} \mid \text{spam}] \mathbb{P}[\text{win} \mid \text{spam}]$$

を仮定する。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbb{P}[\text{spam}]$ および、迷惑メールでない確率 $\mathbb{P}[\text{spam}^c]$ を求めよ。
- (2) $\mathbb{P}[\text{free} \cap \text{win} \mid \text{spam}]$ および $\mathbb{P}[\text{free} \cap \text{win} \mid \text{spam}^c]$ を求めよ。
- (3) “タダ”と“アタリ”を含む場合の迷惑メールの判定率を求めよ。