§9 重積分の定義と基本性質　演習問題 1

✎ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(**定義から計算①**)

重積分の定義にしたがって，区分求積法により重積分

$$\iint_D (x+y+1)\,dxdy, \qquad D := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

を求めよ．

2 (★★☆)(**定義から計算②**)

重積分の定義にしたがって，区分求積法により重積分

$$\iint_D x^2 y\,dxdy, \qquad D := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

を求めよ．

3 (★★★)(**面積確定集合**)

$\mathbb{R}^2$ は平面全体を表し，D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする．

(1) 2 変数関数 $\chi_D(x,y)$ を $\chi_D((x,y)) := \begin{cases} 1 & ((x,y) \in D) \\ 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D) \end{cases}$ で定める．D が**面積確定**であるとは，D を含む長方形領域 $I \supset D$ をとったとき χ_D が I 上積分可能であることをいう．D が面積確定であるという定義は，長方形領域 I の取り方によらず定まることを示せ．

✓**HINT.** D を含む I とは別の長方形領域 I' をとって

$$I \text{ で積分可能} \iff I' \text{ で積分可能}$$

となることを示す．

(2) $A := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1 \text{ かつ } x,\ y \text{ は有理数}\}$ とおく．A は面積確定集合でないことを示せ．

✓**HINT.** 重積分の定義に立ち返って，集合 $[0,1] \times [0,1]$ 上の関数 χ_A の上限和と下限和を求める．