§9 重積分の定義と基本性質　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(定義から計算①)

重積分の定義にしたがって，区分求積法により重積分

$$\iint_D (x+y+1)\,dxdy, \qquad D := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

を求めよ．

解 $f(x,y) := x+y+1$ とおく．区間 $0 \leqq x \leqq 3$ を n 等分して，分点を

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 3, \quad x_k := \frac{3}{n}k \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

とおき，同様に区間 $1 \leqq y \leqq 2$ を m 等分して，分点を

$$1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 2, \quad y_l := 1 + \frac{1}{m}l \ (l = 0, 1, \ldots, m)$$

とおく．次に長方形領域 D を nm 個に分割し，$1 \leqq k \leqq$，$1 \leqq l \leqq m$ に対し，

$$D_{kl} := \{(x,y) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k,\ y_{l-1} \leqq y \leqq y_l\}$$

とおく．D_{kl} は横 $\Delta x_k = \dfrac{3}{n}$，縦 $\Delta y_l = \dfrac{1}{m}$ の小長方形であり，D_{kl} 内の代表点として $\boldsymbol{\xi}_{kl} = (x_k, y_l)$ をとると，重積分の定義により

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} f(\boldsymbol{\xi}_{kl})\Delta x_k \Delta y_k \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} (x_k + y_l + 1)\,\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{m} \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{3}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \left\{\frac{3}{n}k + \frac{1}{m}l + 2\right\} \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{3}{nm}\left\{m\cdot\frac{3}{2}(n+1) + n\cdot\frac{m+1}{2} + 2nm\right\} \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} 3\left\{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right) + 2\right\} \\
&= 3\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2\right) = \mathbf{12}.
\end{aligned}$$

∎

2 (★★☆)(定義から計算②)

重積分の定義にしたがって，区分求積法により重積分

$$\iint_D x^2y\,dxdy, \qquad D := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

を求めよ．

解 $ff(x,y) := x^2y$ とおく．区間 $0 \leqq x \leqq 3$ を n 等分して，分点を

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 3, \quad x_k := \frac{3}{n}k\ \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

とおき，同様に区間 $1 \leqq y \leqq 2$ を m 等分して，分点を

$$1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 2, \quad y_l := 1 + \frac{1}{m}l\ \ (l = 0, 1, \ldots, m)$$

とおく．次に長方形領域 D を nm 個に分割し，$1 \leqq k \leqq$, $1 \leqq l \leqq m$ に対し，

$$D_{kl} := \{(x,y) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k,\ y_{l-1} \leqq y \leqq y_l\}$$

とおく．D_{kl} は横 $\Delta x_k = \dfrac{3}{n}$，縦 $\Delta y_l = \dfrac{1}{m}$ の小長方形であり，D_{kl} 内の代表点として $\boldsymbol{p}_{kl} = (x_k, y_l)$ をとると，重積分の定義により

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} f(\boldsymbol{\xi}_{kl})\Delta x_k \Delta y_k \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_k^2 y_l \frac{3}{n}\cdot\frac{1}{m} \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{3}{nm} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{l=1}^{m} y_l \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{3}{nm} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{n^2}k^2\right)\left(\sum_{l=1}^{m}\left(1 + \frac{l}{m}\right)\right) \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{3}{nm}\cdot\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\left(m + \frac{m+1}{2}\right) \\
&= 9\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2m}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{27}{2}}.
\end{aligned}$$

∎

3 (★★★)(面積確定集合)

$\mathbb{R}^2$ は平面全体を表し，D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする．

(1) 2 変数関数 $\chi_D(x,y)$ を $\chi_D(x,y) := \begin{cases} 1 & ((x,y) \in D) \\ 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D) \end{cases}$ で定める．D が**面積確定**であるとは，D を含む長方形領域 $I \supset D$ をとったとき χ_D が I 上積分可能であることをいう．D が面積確定であるという定義は，長方形領域 I の取り方によらず定まることを示せ．

✓**HINT**. D を含む I とは別の長方形領域 I' をとって

$$I \text{ で積分可能} \iff I' \text{ で積分可能}$$

となることを示す．

(2) $A := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \text{ かつ } x,\ y \text{ は有理数}\}$ とおく．A は面積確定集合でないことを示せ．

✓**HINT**. 重積分の定義に立ち返って，集合 $[0,1] \times [0,1]$ 上の関数 χ_A の上限和と下限和を求める．

解 (1) 座標軸を回転することにより，ここで出てくる長方形領域は，すべてその各辺が座標軸に平行であるとしても一般性を失わない．D を含む I とは別の長方形領域 I' をとる．I と I' を共に含むような長方形領域 $\Xi \supset I \cup I'$ をとる．I，I' は共に Ξ の部分長方形領域とみなすことができる．$\chi_D(\boldsymbol{x})$ は D の外では常に 0 であるから，$\Xi \setminus I$，$\Xi \setminus I'$ 上でも 0 である．したがって，

$$\chi_D \text{ が } I \text{ 上積分可能} \iff \chi_D \text{ が } \Xi \text{ 上積分可能} \iff \chi_D \text{ が } I' \text{ 上積分可能}$$

である．

(2) A が面積確定であるとする．このとき χ_A は長方形領域 $I := [0,1] \times [0,1]$ 上積分可能とならなければならない．長方形領域 I の任意の分割

$$\Delta : I_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$$

(ただし，$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$，$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 1$ はそれぞれ区間 $0 \leqq x \leqq 1$ および $0 \leqq y \leqq 1$ の分割の分点を表す）に対する上限和 $S_\Delta(\chi_A) := \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \max \chi_A(I_{ij}) \mathrm{Area}(I_{ij})$ および下限和 $s_\Delta(\chi_A) := \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \min \chi_A(I_{ij}) \mathrm{Area}(I_{ij})$ について考察する．ここで $\mathrm{Area}(I_{ij})$ は小長方形 I_{ij} の面積を表す．

有理数の稠密性により $x_{i-1} < r_i < x_i$，$y_{j-1} < q_j < y_j$ となる有理数の組 $(r_i, q_j) \in \mathbb{Q}^2$ が存在する．したがって $x_{i-1} < s_i < x_i$，$y_{j-1} < t_j < y_j$ となる無理数の組 (s_i, t_j) も存在する．このとき，

$$\max \chi_A(I_{ij}) = 1, \quad \min \chi_A(I_{ij}) = 0$$

であるから，

$$S_\Delta(\chi_A) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \max \chi_A(I_{ij}) \mathrm{Area}(I_{ij}) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \mathrm{Area}(I_{ij}) = \mathrm{Area}(I) = 1 \quad \cdots ①$$

$$s_\Delta(\chi_A) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \min \chi_A(I_{ij}) \mathrm{Area}(I_{ij}) = 0 \quad \cdots ②$$

を得る．ゆえに，①,②より

$$s(\chi_A) := \sup_\Delta s_\Delta(\chi_A) = 0 < 1 = S(\chi_A) := \inf_\Delta S_\Delta(\chi_A)$$

となるので，これは χ_A は I 上積分可能であることに矛盾する．ゆえに A は面積確定ではない． ∎