§8 条件付き極値問題と最大・最小問題 演習問題 3 解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★★☆)(条件付き最大・最小問題①)

条件 $g(x,y)=x^2+y^2-2=0$ のもとで，関数 $f(x,y)=(x+y)^2$ の最大値・最小値を求めよ．

解 $g(x,y)=0$ をみたす点は円であるから，有界閉集合である．$f(x,y)=(x+y)^2$ は，**この集合上で連続であるから，最大値と最小値をとる**．

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=(x+y)^2-\lambda(x^2+y^2-2)$$

とおくと，

$$F_x=2(x+y)-2\lambda x,\quad F_y=2(x+y)-2\lambda y,\quad F_\lambda=-(x^2+y^2-2)$$

である．

Step 1. (極値をとる点の候補を求める)

Lagrange の未定乗数法により，連立方程式

$$F_x=F_y=F_\lambda=0 \iff \begin{cases} 2(x+y)-2\lambda x=0\cdots① \\ 2(x+y)-2\lambda y=0\cdots② \\ x^2+y^2-2=0\cdots③ \end{cases}$$

をみたす (x,y) と λ を求めよう．①, ②より

$$\begin{pmatrix} 2-2\lambda & 2 \\ 2 & 2-2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad\cdots④.$$

④が非自明解 $(x,y)\neq(0,0)$ を持つための条件は，係数行列の行列式について

$$\det\begin{pmatrix} 2-2\lambda & 2 \\ 2 & 2-2\lambda \end{pmatrix}=0 \iff (2-2\lambda)^2-4=0 \quad \therefore\ \lambda=0,2.$$

・$\lambda=0$ のとき①より $x+y=0$．これと③より $(x,y)=(\pm1,\mp1)$（複号同順）．

・$\lambda=2$ のとき①より $x=y$．これと③より $(x,y)=(\pm1,\pm1)$（複号同順）．

以上より，

$$(x,y,\lambda)=(\pm1,\pm1,2),\quad(\pm1,\mp1,0)\quad(\text{複号同順})$$

を得る．これが条件 $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) の候補を与える．

Step 2. (極値をとる点を実際に求める)

まず $\lambda=2$ のときを考えよう．

$$f(x,y)=f(-x,-y),\quad g(x,y)=g(-x,-y)$$

であるから，$(x,y,\lambda)=(1,1,2)$ のときを考えるだけで十分 (候補点 $(x,y,\lambda)=(-1,-1,2)$ については，上記の f と g の原点に関する対称性により $(x,y,\lambda)=(1,1,2)$ からわかる)．$g_y(1,1)=2\neq 0$ であるから，陰関数定理より $(1,1)$ の近傍で $g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する．よって，$g(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分して (chain rule を用いると)

$$g_x(x,\varphi(x))+g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \cdots ④.$$

さらに④を x で微分して

$$g_{xx}(x,\varphi(x))+g_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+g_{yx}(x,\varphi)\varphi'(x)+g_{yy}(x,\varphi(x))\left(\varphi'(x)\right)^2+g_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)=0$$

$$\therefore \quad g_{xx}(x,\varphi(x))+2g_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+g_{yy}(x,\varphi(x))\left(\varphi'(x)\right)^2+g_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)=0 \quad \cdots ⑤.$$

を得る．ここで $(1,1)$ において，

$$g_x=2,\quad g_y=2,\quad g_{xx}=2,\quad g_{xy}=0,\quad g_{yy}=2$$

であるから，④,⑤より

$$2+2\varphi'(1)=0 \quad \therefore \quad \varphi'(1)=-1$$

$$2+2\cdot 0\cdot\varphi'(1)+2(\varphi'(1))^2+2\varphi''(1)=0 \quad \therefore \varphi''(1)=-2$$

を得る．さらに $(1,1)$ において，

$$f_x=4,\quad f_y=4,\quad f_{xx}=2,\quad f_{xy}=2,\quad f_{yy}=2$$

である．今，$h(x):=f(x,\varphi(x))$ とおくと，

$$h'(x)=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$h''(x)=f_{xx}(x,\varphi(x))+2f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+f_{yy}(x,\varphi(x))(\varphi'(x))^2+f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)$$

ゆえ，$h'(1)=0$* かつ $h''(1)<0$ を得る．したがって，$h(x)$ は $x=1$ で極大値をとる．

同様にして，$\lambda=0$ のとき $(x,y)=(\pm1,\mp1)$ のとき $f(x,y)$ が条件 $g(x,y)=0$ のもとで極値をとるかどうか調べると，極小値をとることがわかる．

以上をまとめて，$f(x,y)$ は **$(x,y)=(\pm1,\pm1)$ のとき最大値 4 をとり，$(x,y)=(\pm1,\mp1)$ のとき最小値 0** をとる． ∎

2 (★★☆)(条件付き最大・最小問題②)

条件 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで，関数 $f(x,y)=5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2$ の最大値・最小値を求めよ．

*もともとは $h'=0$ となるように Lagrange の未定乗数法で $(x,y)=(1,1)$ を求めたのだから，$h'(1)=0$ は当然である．

解 $g(x,y)=0$ をみたす点は円であるから，有界閉集合である．$f(x,y)=3x^2+2xy+y^2$ は，**この集合上で連続であるから，最大値と最小値をとる**．

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$$

とおくと，

$$F_x=10x+2\sqrt{3}y-2\lambda x,\quad F_y=2\sqrt{3}x+14y-2\lambda y,\quad F_\lambda=-(x^2+y^2-1)$$

である．

Step 1. (極値をとる点の候補を求める)

Lagrange の未定乗数法により，連立方程式

$$F_x=F_y=F_\lambda=0 \iff \begin{cases}(5-\lambda)x+\sqrt{3}y=0\cdots① \\ \sqrt{3}x+(7-\lambda)y=0\cdots② \\ x^2+y^2-1=0\cdots③\end{cases}$$

をみたす (x,y) と λ を求めよう．①, ②が非自明解 $(x,y)\neq(0,0)$ を持つための条件は，係数行列の行列式について

$$\det\begin{pmatrix}5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7-\lambda\end{pmatrix}=0 \quad\iff\quad \lambda^2-12\lambda+32=0 \quad \therefore\ \lambda=4,\ 8.$$

・$\lambda=4$ のとき①より $x=-\sqrt{3}y$．これを③へ代入して $(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{1}{2}\right)$（複号同順）．

・$\lambda=8$ のとき②より $y=\sqrt{3}x$．これを③へ代入して $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$（複号同順）．

以上より，

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{1}{2},4\right),\quad \left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2},8\right) \quad \text{(複号同順)}$$

を得る．これが条件 $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) の候補を与える．

Step 2. (極値をとる点を実際に求める)

まず $\lambda=4$ のときを考えよう．

$$f(x,y)=f(-x,-y),\quad g(x,y)=g(-x,-y)$$

であるから，$(x,y,\lambda)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},4\right)$ のときを考えるだけで十分（候補点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},4\right)$ については，上記の f と g の原点に関する対称性により $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},4\right)$ からわかる）．$g_y(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})=2\neq 0$ であるから，陰関数定理より $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ の近傍で $g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する．よって，$g(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分して，

$$g_x(x,\varphi(x))+g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \cdots④.$$

さらに④を x で微分して

$$g_{xx}(x,\varphi(x))+2g_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+g_{yy}(x,\varphi(x))\left(\varphi'(x)\right)^2+g_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)=0 \quad \cdots⑤.$$

を得る．ここで $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ において，

$$g_x = \sqrt{3}, \quad g_y = -1, \quad g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = 0, \quad g_{yy} = 2$$

であるから，④,⑤より

$$\sqrt{3} - \varphi'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad \varphi'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$2 + 2 \cdot 0 \cdot \varphi'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\varphi'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 - \varphi''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \therefore \varphi''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8$$

を得る．さらに $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ において，

$$f_x = 4\sqrt{3}, \quad f_y = -4, \quad f_{xx} = 10, \quad f_{xy} = 2\sqrt{3}, \quad f_{yy} = 14$$

である．今，$h(x) := f(x, \varphi(x))$ とおくと，

$$h'(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

$$h''(x) = f_{xx}(x, \varphi(x)) + 2f_{xy}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f_{yy}(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f_y(x, \varphi(x))\varphi''(x)$$

ゆえ，$h'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0^{\dagger}$かつ $h''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 32 > 0$ を得る．したがって，$h(x)$ は $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で極小値をとる．

同様にして，$\lambda = 8$ のとき $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき $f(x, y)$ が条件 $g(x, y) = 0$ のもとで極値をとるかどうか調べると，極大値をとることがわかる．

以上をまとめて, $f(x, y)$ は $\boldsymbol{(x, y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ **のとき最大値 8 をとり,** $\boldsymbol{(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)}$ **のとき最小値 4** をとる． ∎

$\boxed{3}$ (★★★)(Lagrange 未定乗数法の応用)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は開集合，$f(x, y)$, $g(x, y)$ はともに Ω 上の C^2 級関数とする．点 $(a, b) \in \Omega$ において $f(x, y)$, $g(x, y)$ は 3 条件

(1) $g(a, b) = 0$

(2) $\nabla g(a, b) \neq {}^{\top}(0, 0)$

(3) ある実数 λ に対して $\nabla f(a, b) - \lambda \nabla g(a, b) = {}^{\top}(0, 0)$

をみたしているとする．

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & f_{xx}(a, b) - \lambda g_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) - \lambda g_{xy}(a, b) \\ g_y(a, b) & f_{xy}(a, b) - \lambda g_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) - \lambda g_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，$\Delta < 0$ ならば $f(a, b)$ は極小値，$\Delta > 0$ ならば $f(a, b)$ は極大値であることを示せ．

† もともとは $h' = 0$ となるように Lagrange の未定乗数法で $(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ を求めたので明らかである．

解 $\nabla g(a,b) \neq {}^\top(0,0)$ だから，$g_x(a,b) \neq 0$ または $g_y(a,b) \neq 0$．以下，$g_y(a,b) \neq 0$ の場合を扱う（ $g_x(a,b) \neq 0$ の場合も同様に証明できる）．このとき，陰関数定理より (a,b) の近傍で陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在して，

$$\begin{cases} b = \varphi(a) \\ g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \cdots ① \end{cases}$$

をみたす．①の両辺を x で微分して

$$g_x(x, \varphi(x)) + g_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \cdots ②$$

よって，$\varphi'(a) = -\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} \quad \cdots ③$．さらに②の両辺を x で微分して，

$$g_{xx}(x,\varphi(x)) + 2g_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + g_{yy}(x,\varphi(x))(\varphi'(x))^2 + g_y(x,\varphi(x))\varphi''(x) = 0.$$

したがって，$\varphi''(a) = -\dfrac{g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2}{g_y(a,b)} \quad \cdots ④$．また，条件 (1) を用いると，$\lambda = f_x(a,b)/g_y(a,b) \ \cdots ⑤$ を得る．次に，$h(x) := f(x, \varphi(x))$ とおくと chain rule により

$$h'(x) = f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x),$$
$$h''(x) = f_{xx}(x,\varphi(x)) + 2f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + f_{yy}(x,\varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x).$$

であるから，③, ④, ⑤を用いると

$$\begin{aligned}
h''(a) &= f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b)\varphi'(a) + f_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2 \\
&\quad - \underbrace{\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}}_{=\lambda}\left(g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2\right) \\
&= \left(f_{xx}(a,b) - \lambda g_{xx}(a,b)\right) + 2\left(f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b)\right)\varphi'(a) \\
&\quad + \left(f_{yy}(a,b) - \lambda g_{yy}(a,b)\right)(\varphi'(a))^2 \\
&= \left(f_{xx}(a,b) - \lambda g_{xx}(a,b)\right) + 2\left(f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b)\right)\left(-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\right) \\
&\quad + \left(f_{yy}(a,b) - \lambda g_{yy}(a,b)\right)\left(\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\right)^2 \\
&= -\underbrace{\frac{1}{g_y(a,b)^2}}_{>0} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b) - \lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) - \lambda g_{yy}(a,b) \end{pmatrix}}_{=\Delta}
\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の行で第 1 行に関する余因子展開を用いた．したがって，$\Delta < 0$ ならば $h''(a) > 0$ であるから，$h(x)$ は $x = a$ で極小値をとり，$\Delta > 0$ ならば $h''(a) < 0$ であるから，$h(x)$ は $x = a$ で極大値をとることがわかる．ゆえに，$h(a) = f(a,b)$ であるから，$\Delta < 0$ ならば $f(a,b)$ は極小値，$\Delta > 0$ ならば $f(a,b)$ は極大値であることが示された． ∎