§8 条件付き極値問題と最大・最小問題　演習問題 2　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(2 次形式の条件付き極値問題)

制約条件 $x^2+y^2=1$ のもとで 2 次形式

$$Q(x,y) := ax^2+2bxy+cy^2$$

の最大値・最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ．ここに a, b, c は定数で $b \neq 0$ とする．

解　$g(x,y) := x^2+y^2-1$ とおくと，$\nabla g = (2x, 2y)$ だから，g の停留点は原点 $(0,0)$ のみ．これは円 $g=0$ 上にはない．関数 $Q(x,y)$ は連続であるから，円 $g=0$[*1]上で最大値・最小値をとる．

$F(x,y,\lambda) := ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} F_x &= 2ax+2by-2\lambda x \\ F_y &= 2bx+2cy-2\lambda y \\ F_\lambda &= -(x^2+y^2-1) \end{aligned}$$

だから，Lagrange の未定乗数法により Q の制約条件 $g=0$ での最大・最小は

$$\begin{aligned} & F_x = F_y = F_z = 0 \\ \iff & \begin{cases} (\lambda-a)x-by=0 & \cdots ① \\ -bx+(\lambda-c)y=0 & \cdots ② \\ x^2+y^2=1 & \cdots ③ \end{cases} \end{aligned}$$

をみたす (x,y,λ) で起こる．$(x,y)=(0,0)$ は③を満たさないから，連立方程式①, ②が $(x,y) \neq (0,0)$ なる解を持つための必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-a & -b \\ -b & \lambda-c \end{pmatrix} = 0$$

である．ゆえに，固有方程式

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0 \quad \cdots ④$$

を得る．④の判別式について，

$$(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0 \quad (\because b \neq 0)$$

[*1] 円は有界閉集合とよばれる集合の一例である．ここで，ある集合 S が適当な半径の円板に含まれ，集合 S 内の任意の収束する点列の収束先が S に属するとき，集合 S を有界閉集合という．ここでは**「有界閉集合上の連続関数は最大値・最小値を持つ」**という定理を用いる．

であるから，固有方程式④は相異なる 2 つの実数解

$$\lambda_1 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

を持つ．各 λ_j $(j=1,2)$ に対応する連立方程式①, ②, ③の解を (x_j, y_j) とすると

$$\begin{aligned} Q(x_j, y_j) &= ax_j^2 + 2bx_jy_j + cy_j^2 \\ &= x_j(ax_j + by_j) + y_j(bx_j + cu_j) \\ &\overset{①,②}{=} x_j(\lambda_j x_j) + y_j(\lambda_j y_j) \\ &\overset{③}{=} \lambda_j \end{aligned}$$

ゆえに，$\lambda_2 > \lambda_1$ に注意して，

$$\boldsymbol{\max_{x^2+y^2=1} Q(x,y) = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}}$$
$$\boldsymbol{\min_{x^2+y^2=1} Q(x,y) = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}}.$$

■

Check 実は Lagrange 未定乗数法を使わずとも，この問題は高校数学の範囲でも解くことができる．

【別解（高校数学）】 制約条件 $x^2+y^2=1$ より $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$ とおける．このとき，

$$\begin{aligned} Q(\theta) := Q(\cos\theta, \sin\theta) &= a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\ &= a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\sin 2\theta + c\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\cos(2\theta+\alpha) \quad (\alpha\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$-1 \leqq \cos(2\theta+\alpha) \leqq 1$ だから，

$$\boldsymbol{\max_{\theta\in\mathbb{R}} Q(\theta) = Q\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}}$$
$$\boldsymbol{\min_{\theta\in\mathbb{R}} Q(\theta) = Q\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}}.$$

2 (★★☆)(点と直線の最短距離)

定点 (x_0, y_0) から直線 $ax+by+c=0$ までの最短距離 d が

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられることを示せ．ここに a, b, c は定数で $(a,b) \neq (0,0)$ とする．

解 平面上の任意の点 (x,y) から定点 (x_0, y_0) までの距離の平方を

$$f(x,y) := (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

とおいて，$g(x,y) := ax+by+c$ とおく．仮定より $\nabla g = (a,b) \neq (0,0)$ だから，g は停留点を持たない．f は連続であるから直線 $g=0$ 上で最小値を持つ．今，

$$F(x,y,\lambda) := (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \lambda(ax+by+c)$$

とおくと，Lagrange の未定乗数法により f の制約条件 $g=0$ での最大・最小は

$$\begin{aligned} & F_x = F_y = F_z = 0 \\ \iff & \begin{cases} 2(x-x_0)x - a\lambda = 0 & \cdots ① \\ 2(y-y_0) - b\lambda = 0 & \cdots ② \\ ax+by+c = 0 & \cdots ③ \end{cases} \end{aligned}$$

をみたす (x,y,λ) で起こる．①より $x = \frac{a\lambda}{2} + x_0 \cdots ④$，$y = \frac{b\lambda}{2} + y_0 \cdots ⑤$ であり，これらを③に代入して，

$$a\left(\frac{a\lambda}{2} + x_0\right) + b\left(\frac{b\lambda}{2} + y_0\right) + c = 0$$

$$\therefore \ \lambda = -\frac{2(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}.$$

ゆえに，これを④, ⑤へ代入して

$$x = -\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} + x_0$$

$$y = -\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} + y_0$$

を得る．よってこの点で $f(x,y)$ は最小値をとり，

$$\begin{aligned} \min_{ax+by+c=0} f(x,y) &= \left\{-\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right\}^2 + \left\{-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right\}^2 \\ &= \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

すなわち，求める最短距離 d は $d = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で与えられる． ∎

3 (★★★)(2 つの制約条件下での極値問題)

制約条件

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad (x-1)^2+y^2=1$$

のもとでの関数

$$f(x,y,z)=x^2+(y+1)^2+z^2$$

の最大値・最小値を求めよ.

解 $G := \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-4, & (x-1)^2+y^2-1 \end{pmatrix}$ とおく．G の零点集合を

$$N := \{(x,y,z) \,:\, G(x,y,z)=0\}$$

とすると，$f(x,y,z)$ は連続関数だから，N 上で最大値・最小値を持つ. [*2]

さて，G の Jacobi 行列

$$J_G = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-1) & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

について，各 2×2 小行列式

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2(x-1) & 2y \end{pmatrix} = 4y$$

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 2(x-1) & 0 \end{pmatrix} = -4z(x-1)$$

$$\det\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = -4yz$$

のすべてが G の零点集合 N 上で 0 になるのは，第 1 式より $y=0$ かつ第 2 式，制約条件から得られる

$$\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ (x-1)^2=1 \\ z(x-1)=0 \end{cases} \iff \quad x=2,\ z=0$$

のとき．すなわち，点 $(2,0,0)$ において Jacobi 行列 J_G はフルランク[*3]ではない．このとき，$f(2,0,0)=5$ である.

以下，$(x,y,z)\neq(2,0,0)$ としよう. [*4] $\nabla f=(2x,2(y+1),2z)$ だから，Lagrange の未定乗数法により，

$$\nabla f = (\lambda_1,\lambda_2)J_G, \quad x^2+y^2+z^2=4, \quad (x-1)^2+y^2=1$$

[*2] N は有界閉集合である.

[*3] 一般に行列 X に対して X が持つことのできる最大の階数のことを**フルランク**という．ここでは線形代数の理論から従う，「行列の階数は 0 でない小行列式の最大次数に等しい」ことを用いている.

[*4] フルランクでない点 $(2,0,0)$ 以外の点においては，Lagrange の未定乗数法が適用できることに注意.

$$
\iff \begin{cases} x = \lambda_1 x + \lambda_2 (x-1) & \cdots ① \\ y + 1 = \lambda_1 y + \lambda_2 y & \cdots ② \\ z = \lambda_1 z & \cdots ③ \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & \cdots ④ \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 & \cdots ⑤ \end{cases}
$$

をみたす $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ を求める．③より $\lambda_1 = 1$ または $z = 0$．$z = 0$ とすると④,⑤より，$x^2 + y^2 = 4$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$．これを解けば $x = 2$, $y = 0$ であり，これを①,②へ代入すると，②は $1 = 0$ となり不合理，したがって，$z \neq 0$．以下，$\lambda_1 = 1$ のもと，①,②より

$$
0 = \lambda_2 (x-1), \quad 1 = \lambda_2 y \quad \cdots\cdots ⑥.
$$

⑥-第 1 式より $x = 1$ または $\lambda_2 = 0$．$\lambda_2 = 0$ は⑥-第 2 式より不合理だから，$\lambda_2 \neq 0$．ゆえに，⑥を解くと，$x = 1$, $y = \frac{1}{\lambda_2}$．これらを⑤へ代入して，

$$
0^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^2 = 1 \quad \therefore\ \lambda_2 = \pm 1 \quad \therefore\ y = \pm 1 \quad (\text{複号同順}).
$$

このとき，④より

$$
1^2 + (\pm 1)^2 + z^2 = 4 \quad \therefore\ z = \pm 2.
$$

したがって，$(x, y, z) \neq (2, 0, 0)$ での f の最大・最小を与える候補点は

$$
(x, y, z) = (1,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2}) \quad (\text{複号任意}).
$$

よって，$f(1,\ 1,\ \pm\sqrt{2}) = 7$, $f(1,\ -1,\ \pm\sqrt{2}) = 3$ であり，既に求めた $f(2, 0, 0) = 5$ と比較すれば

$$
\mathbf{min}\, \boldsymbol{f} = \mathbf{3}, \qquad \mathbf{max}\, \boldsymbol{f} = \mathbf{7}.
$$

∎