最大最小問題　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　D の内部で極値を取る可能性のある点を求める。また D の境界で最大最小の可能性のある点を，Lagrange の未定乗数法を用いて求める。それらの点における f の値を比較することで，最大値と最小値が求められる。

(1) $f(x,y)=6x^2+6xy+5y^2$, $D=\{(x,y)\mid x^2+2y^2\leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y)=12x+6y=0 \\ f_y(x,y)=6x+10y=0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。

2° D の境界

$\varphi(x,y)=x^2+2y^2-1$ とおくと，境界は $\varphi(x,y)=0$ で表される。$\varphi_x(x,y)=2x, \varphi_y(x,y)=4y$ であるから，Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} x^2+2y^2=1 \quad \cdots ① \\ (12x+6y)+\lambda\cdot 2x=0 \quad \cdots ② \\ (6x+10y)+\lambda\cdot 4y=0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす (x,y,λ) を求めればよい。②, ③を x,y についての連立 1 次方程式と見る。行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 12+2\lambda & 6 \\ 6 & 10+4\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，左辺の行列の行列式が 0 でなければ解としては $(x,y)=(0,0)$ しか存在せず，この点は境界に乗っていない。よって境界上の点が解になるためには，行列式が 0 であることが必要である。

$$\begin{vmatrix} 12+2\lambda & 6 \\ 6 & 10+4\lambda \end{vmatrix}=(12+2\lambda)(10+4\lambda)-6\times 6=4(2\lambda+3)(\lambda+7)$$

より

$$\lambda=-\frac{3}{2},-7$$

を得る。$\lambda=-\dfrac{3}{2}$ のとき，②（③でもよい）より

$$y=-\frac{3}{2}x$$

となるので，これを①に代入して

$$x^2+2\left(-\frac{3}{2}x\right)^2=1,\quad \frac{11}{2}x^2=1,\quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{3}{\sqrt{22}}\right)$$

という 2 点が得られた。$\lambda = -7$ のとき，②（③でもよい）より

$$x = 3y$$

となるので，これを①に代入して

$$(3y)^2 + 2y^2 = 1, \quad 11y^2 = 1, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{11}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\frac{3}{\sqrt{11}}, \pm\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

という 2 点が得られた。

3° 値の比較

以上で求めた 5 点でのみ最大・最小の可能性がある。

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0 \\ &f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{3}{\sqrt{22}}\right) = \frac{3}{2} \\ &f\left(\pm\frac{3}{\sqrt{11}}, \pm\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = 7 \end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x,y) = \left(\pm\frac{3}{\sqrt{11}}, \pm\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ のときの 7，最小値は $(x,y) = (0,0)$ のときの 0 である。

(2) $f(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$, $D = \{(x,y) \mid 3x^2 + y^2 \leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 10x - 4y = 0 \\ f_y(x,y) = -4x + 4y = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y) = (0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。

2° D の境界

$\varphi(x,y) = 3x^2 + y^2 - 1$ とおくと，境界は $\varphi(x,y) = 0$ で表される。$\varphi_x(x,y) = 6x, \varphi_y(x,y) = 2y$ であるから，Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 & \cdots ① \\ (10x - 4y) + \lambda \cdot 6x = 0 & \cdots ② \\ (-4x + 4y) + \lambda \cdot 2y = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす (x, y, λ) を求めればよい。②, ③を x, y についての連立 1 次方程式と見る。行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 10+6\lambda & -4 \\ -4 & 4+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，左辺の行列の行列式が 0 でなければ解としては $(x, y) = (0, 0)$ しか存在せず，この点は境界に乗っていない。よって境界上の点が解になるためには，行列式が 0 であることが必要である。

$$\begin{vmatrix} 10+6\lambda & -4 \\ -4 & 4+2\lambda \end{vmatrix} = (10+6\lambda)(4+2\lambda) - 16 = 4(3\lambda+2)(\lambda+3)$$

より

$$\lambda = -\frac{2}{3}, -3$$

を得る。$\lambda = -\dfrac{2}{3}$ のとき，②（③でもよい）より

$$y = \frac{3}{2}x$$

となるので，これを①に代入して

$$3x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 1, \quad \frac{21}{4}x^2 = 1, \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{21}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{21}}, \pm\frac{3}{\sqrt{21}}\right)$$

という 2 点が得られた。$\lambda = -3$ のとき，②（③でもよい）より

$$y = -2x$$

となるので，これを①に代入して

$$3x^2 + (-2x)^2 = 1, \quad 7x^2 = 1, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \mp\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

という 2 点が得られた。

3° 値の比較

以上で求めた 5 点でのみ最大・最小の可能性がある。

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0 \\ &f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{21}}, \pm\frac{3}{\sqrt{21}}\right) = \frac{3}{2} \\ &f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \mp\frac{2}{\sqrt{7}}\right) = 3 \end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}},\mp\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$ のときの 3，最小値は $(x,y)=(0,0)$ のときの 0 である。

(3) $f(x,y)=7x^2-4xy+4y^2$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$
少し簡略化して記述する。
1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y)=14x-4y=0 \\ f_y(x,y)=-4x+8y=0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。
2° D の境界
$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく。$\varphi_x(x,y)=2x, \varphi_y(x,y)=2y$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \quad \cdots ① \\ (14x-4y)+\lambda\cdot 2x=0 \quad \cdots ② \\ (-4x+8y)+\lambda\cdot 2y=0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$\begin{pmatrix} 14+2\lambda & -4 \\ -4 & 8+2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが $(0,0)$ 以外の解を持つ条件として

$$\begin{vmatrix} 14+2\lambda & -4 \\ -4 & 8+2\lambda \end{vmatrix}=4(\lambda+3)(\lambda+8)$$

より

$$\lambda=-3,-8$$

を得る。$\lambda=-3$ のとき，②より

$$y=2x$$

となるので，これを①に代入して

$$x^2+4x^2=1, \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

という 2 点が得られた。$\lambda=-8$ のとき，②より

$$x=-2y$$

となるので，これを①に代入して

$$4y^2+y^2=1, \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

という 2 点が得られた。

3° 値の比較

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= 3 \\ f\left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) &= 8 \end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x,y) = \left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のときの 8，最小値は $(x,y) = (0,0)$ のときの 0 である。

(4) $f(x,y) = 3x^2 + 8xy + 4y^2$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + 5y^2 \leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x + 8y = 0 \\ f_y(x,y) = 8x + 8y = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y) = (0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。

2° D の境界

$\varphi(x,y) = x^2 + 5y^2 - 1$ とおく。$\varphi_x(x,y) = 2x, \varphi_y(x,y) = 10y$ より

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 1 \quad \cdots ① \\ (6x + 8y) + \lambda \cdot 2x = 0 \quad \cdots ② \\ (8x + 8y) + \lambda \cdot 10y = 0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$\begin{pmatrix} 6 + 2\lambda & 8 \\ 8 & 8 + 10\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが $(0,0)$ 以外の解を持つ条件として

$$\begin{vmatrix} 6 + 2\lambda & 8 \\ 8 & 8 + 10\lambda \end{vmatrix} = 4(5\lambda - 1)(\lambda + 4)$$

より

$$\lambda = \frac{1}{5}, -4$$

を得る。$\lambda = \frac{1}{5}$ のとき，②より

$$y = -\frac{4}{5}x$$

となるので，これを①に代入して

$$x^2+5\times\frac{16}{25}x^2=1,\quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{21}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\sqrt{\frac{5}{21}},\mp\frac{4}{\sqrt{105}}\right)$$

という 2 点が得られた。$\lambda=-4$ のとき，②より

$$x=4y$$

となるので，これを①に代入して

$$16y^2+5y^2=1,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{21}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\frac{4}{\sqrt{21}},\pm\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$$

という 2 点が得られた。

3° 値の比較

$$\begin{aligned}
&f(0,0)=0\\
&f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{21}},\mp\frac{4}{\sqrt{105}}\right)=-\frac{1}{5}\\
&f\left(\pm\frac{4}{\sqrt{21}},\pm\frac{1}{\sqrt{21}}\right)=4
\end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x,y)=\left(\pm\frac{4}{\sqrt{21}},\pm\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$ のときの 4，最小値は $(x,y)=\left(\pm\sqrt{\frac{5}{21}},\mp\frac{4}{\sqrt{105}}\right)$ のときの $-\frac{1}{5}$ である。

(5) $f(x,y)=7x^2-8xy-8y^2$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y)=14x-8y=0\\ f_y(x,y)=-8x-16y=0\end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。

2° D の境界

$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく。$\varphi_x(x,y)=2x,\varphi_y(x,y)=2y$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \quad \cdots ①\\ (14x-8y)+\lambda\cdot 2x=0 \quad \cdots ②\\ (-8x-16y)+\lambda\cdot 2y=0 \quad \cdots ③\end{cases}$$

②, ③より

$$\begin{pmatrix} 14+2\lambda & -8 \\ -8 & -16+2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが $(0,0)$ 以外の解を持つ条件として

$$\begin{vmatrix} 14+2\lambda & -8 \\ -8 & -16+2\lambda \end{vmatrix} = 4(\lambda-9)(\lambda+8)$$

より

$$\lambda = 9, -8$$

を得る。$\lambda = 9$ のとき，②より

$$4x = y$$

となるので，これを①に代入して

$$x^2 + 16x^2 = 1, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}, \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

という 2 点が得られた。$\lambda = -8$ のとき，②より

$$x = -4y$$

となるので，これを①に代入して

$$16y^2 + y^2 = 1, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\mp\frac{4}{\sqrt{17}}, \pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

という 2 点が得られた。

3° 値の比較

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0 \\ &f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}, \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -9 \\ &f\left(\mp\frac{4}{\sqrt{17}}, \pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 8 \end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x,y) = \left(\mp\frac{4}{\sqrt{17}}, \pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ のときの 8，最小値は $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}, \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ のときの -9 である。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $f(x,y) = x - 2y$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + 5y^2 \leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 1 \\ f_y(x,y) = -2 \end{cases}$$

より，D の内部で極値を取ることはない。

2° D の境界

$\varphi(x,y) = x^2 + 5y^2 - 1$ とおく。$\varphi_x(x,y) = 2x, \varphi_y(x,y) = 10y$ より

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 1 & \cdots ① \\ 1 + \lambda \cdot 2x = 0 & \cdots ② \\ -2 + \lambda \cdot 10y = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$\lambda = -\frac{1}{2x} = \frac{1}{5y},$$

したがって

$$x = -\frac{5}{2}y$$

を得る。これを①に代入して

$$\frac{25}{4}y^2 + 5y^2 = 1, \quad y = \pm\frac{2}{3\sqrt{5}}$$

を得る。したがって最大・最小を与える可能性のある点として

$$\left(\mp\frac{\sqrt{5}}{3}, \pm\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$$

という 2 点が得られた。

3° 値の比較

$$f\left(\mp\frac{\sqrt{5}}{3}, \pm\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) = \mp\frac{3}{\sqrt{5}}$$

となるので，最大値は $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$ のときの $\frac{3}{\sqrt{5}}$，最小値は $(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$ のときの $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ である。

(2) $f(x,y) = x^3 + 2y^3$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 6y^2 = 0 \end{cases}$$

より，$(x, y)=(0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。

2° D の境界

$\varphi(x, y)=x^2+y^2-1$ とおく。$\varphi_x(x, y)=2x, \varphi_y(x, y)=2y$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ 3x^2+\lambda\cdot 2x=0 & \cdots ② \\ 6y^2+\lambda\cdot 2y=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$x(3x+2\lambda)=0,\ 2y(3y+\lambda)=0$$

第 1 式より $x=0$ または $\lambda=-\dfrac{3}{2}x$，第 2 式より $y=0$ または $\lambda=-3y$ である。$x=0$ とすると①より $y=\pm 1$，$y=0$ とすると①より $x=\pm 1$，$x=y=0$ は境界上にないので，残る可能性は

$$\lambda=-\frac{3}{2}x=-3y$$

したがって

$$x=2y$$

となる。これを①に代入して

$$4y^2+y^2=1, \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる。このとき $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となる。以上により

$$(0, \pm 1),\ (\pm 1, 0),\ \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

という 5 点が得られた。

3° 値の比較

$$\begin{aligned} &f(0,0)=0 \\ &f(0,\pm 1)=\pm 2 \\ &f(\pm 1,0)=\pm 1 \\ &f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x, y)=(0,1)$ のときの 2，最小値は $(x, y)=(0,-1)$ のときの -2 である。

(3) $f(x, y)=x^4+y^4$, $D=\{(x, y) \mid 3x^2+2y^2 \leqq 1\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x, y)=4x^3=0 \\ f_y(x, y)=4y^3=0 \end{cases}$$

より，$(x, y)=(0,0)$ を得る。この点は確かに D の内部に入っている。

2° D の境界

$\varphi(x,y)=3x^2+2y^2-1$ とおく。$\varphi_x(x,y)=6x, \varphi_y(x,y)=4y$ より

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2=1 & \cdots ① \\ 4x^3+\lambda\cdot 6x=0 & \cdots ② \\ 4y^3+\lambda\cdot 4y=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$2x(2x^2+3\lambda)=0,\ 4y(y^2+\lambda)=0$$

第 1 式より $x=0$ または $\lambda=-\dfrac{2}{3}x^2$，第 2 式より $y=0$ または $\lambda=-y^2$ である。$x=0$ とすると①より $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y=0$ とすると①より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x=y=0$ は境界上にないので，残る可能性は

$$\lambda=-\frac{2}{3}x^2=-y^2$$

したがって

$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$$

となる。これを①に代入して

$$3x^2+\frac{4}{3}x^2=1,\quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{13}}$$

となる。以上により

$$\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\ \left(\pm\sqrt{\frac{3}{13}},\pm\sqrt{\frac{2}{13}}\right),\ \left(\pm\sqrt{\frac{3}{13}},\mp\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$$

という 8 点が得られた。

3° 値の比較

$$\begin{aligned} f(0,0)&=0 \\ f\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)&=\frac{1}{4} \\ f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)&=\frac{1}{9} \\ f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{13}},\pm\sqrt{\frac{2}{13}}\right)&=\frac{1}{13} \\ f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{13}},\mp\sqrt{\frac{2}{13}}\right)&=\frac{1}{13} \end{aligned}$$

となるので，最大値は $(x,y)=\left(0,\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のときの $\dfrac{1}{4}$，最小値は $(x,y)=(0,0)$ のときの 0 である。

(4) $f(x,y)=x^3+2xy-3y^2$, $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\,0\leqq y\leqq 2\}$

1° D の内部

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+2y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=2x-6y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

②より $x=3y$, ①に代入して

$$27y^2+2y=0$$

これを解いて

$$y=0,-\frac{2}{27}$$

よって

$$(x,y)=(0,0),\ \left(-\frac{2}{9},-\frac{2}{27}\right)$$

の 2 点を得る。このうち D に入っているのは $(0,0)$ のみである。($(0,0)$ は D の境界に入っている。)

2° D の境界

D の境界は 4 本の線分からなる。1 本目，$y=0, 0\leqq x\leqq 1$ 上の f の値を見ると，

$$f(x,0)=x^3$$

より，$x=0$ で最小値 0，$x=1$ で最大値 1 を取る。2 本目，$x=1, 0\leqq y\leqq 2$ 上では

$$f(1,y)=1+2y-3y^2=-3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

より，$y=\frac{1}{3}$ で最大値 $\frac{4}{3}$，$y=2$ で最小値 -7 を取る。3 本目，$y=2, 0\leqq x\leqq 1$ 上では

$$f(x,2)=x^3+4x-12$$

この右辺を $g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=3x^2+4>0$$

となるので $g(x)$ は単調増加，したがって $x=0$ で最小値 -12，$x=1$ で最大値 -7 を取る。4 本目，$x=0, 0\leqq y\leqq 2$ 上では

$$f(0,y)=-3y^2$$

より，$y=0$ で最大値 0，$y=2$ で最小値 -12 を取る。

3° 値の比較

$f(0,0)=0$ と合わせて，得られた値は

$$0,\ 1,\ \frac{4}{3},\ -7,\ -12$$

となった。よって最大値は $\frac{4}{3}$ ($(x,y)=\left(1,\frac{1}{3}\right)$ のとき), 最小値は -12 ($(x,y)=(0,2)$ のとき) である。