§7 陰関数の定理　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(陰関数の微分計算)

曲線 C : $f(x,y)=0$ 上の点 P の近傍において，次の方程式 $f(x,y)=0$ は陰関数 $y=\varphi(x)$ を持つことを示し，導関数 $\varphi'(x)$ および P における微分係数 φ' を求めよ：

(1) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-x+y-2,\quad \mathrm{P}\,(0,1).$

(2) $f(x,y)=\cos y+2x\cos(xy)+2y\cos x-\pi,\quad \mathrm{P}\,(\pi,0).$

解 (1) $f_x(x,y)=2x-2y^2-1$, $f_y(x,y)=-4xy+4y^3+1$ であり，$f_y(0,1)=5\neq 0$ であるから，陰関数定理より $(0,1)$ の近傍で定義された陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在して，

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x))=0 \\ 1=\varphi(0) \end{cases}$$

が成り立つ．第 1 式を x で偏微分して，chain rule を使うと

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$$

$$\therefore\ \varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}=-\boldsymbol{\frac{2x-2\varphi(x)^2-1}{-4x\varphi(x)+4\varphi(x)^3+1}}.$$

したがって，$\boldsymbol{\varphi'(0)}=-\dfrac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}.$

(2) $f_x(x,y)=2\cos(xy)-2xy\sin(xy)-2y\sin x$, $f_x(x,y)=-\sin y-2x^2\sin(xy)+2\cos x$ であって，$f_y(\pi,0)=-2\neq 0$ であるから，陰関数定理より $(\pi,0)$ の近傍で定義された陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在して，

$$\begin{cases} \varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \\ 0=\varphi(\pi) \end{cases}$$

が成り立つ．ゆえに，

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}=-\boldsymbol{\frac{2\cos(x\varphi(x))-2x\varphi(x)\sin(x\varphi(x))-2\varphi(x)\sin x}{-\sin\varphi(x)-2x^2\sin(x\varphi(x))+2\cos x}}.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\varphi'(\pi)}=-\frac{f_x(\pi,0)}{f_y(\pi,0)}=\boldsymbol{1}.$$

∎

$\boxed{2}$ (★☆☆)(1 変数関数の極値判定条件)

関数 $f(x)$ は C^2 級（すなわち第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在して連続）であり，$f'(a)=0$ をみたしているとする．このとき，以下を示せ．

(1) $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値．

(2) $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値．

解 (1) 仮定の $f'(a)=0$ と Taylor の定理より，ある $\theta\in(0,1)$ が存在して，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a\theta+x(1-\theta))(x-a)^2 \\ &= f(a)+\frac{1}{2}f''(a\theta+x(1-\theta))(x-a)^2 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

が成り立つ．今，$f''(x)$ は連続で $f''(a)>0$ だから $x=a$ の近くで $f''(x)>0$．よって $x\neq a$ が a に近いとき $f''(a\theta+x(1-\theta))(x-a)^2>0$ だから，①より $f(x)>f(a)$ となって $f(a)$ は $f(x)$ の極小値である．

(2) $-f(x)$ に (1) の議論を適用すれば，$x\neq a$ が a に近いとき $-f(x)>-f(a)\cdots②$ を得るが，a に近い x に対して ② $\iff$ $f(x)<f(a)$ だから $f(a)$ は $f(x)$ の極大値である． ∎

$\boxed{3}$ (★★☆)(陰関数の極値)

次の方程式で与えられる陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$

(2) $f(x,y)=x^2-xy-y^2+2=0$

解 (1) 陰関数 $y=\varphi(x)$ は $f(x,\varphi(x))=0$ を満たすから，

$$\begin{aligned} & f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \\ \therefore\ & (2x+\varphi(x))+(x+2\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \cdots ①. \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ の極値を与える点において $\varphi'(x)=0$ であるから，①より $2x+\varphi(x)=0\cdots②$ を満たす．これを元の方程式 $f(x,\varphi(x))=x^2+x\varphi(x)+\varphi^2(x)-1=0$ へ代入して，

$$x^2+x(-2x)+(-2x)^2-1=0 \qquad \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ゆえに，$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ が $\varphi(x)$ の極値を与える点の候補であり，

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

を満たす．以下，$\varphi''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の符号を調べよう．[*] ①より $\varphi'(x)=-\dfrac{2x+\varphi(x)}{x+2\varphi(x)}$ だから，

$$\varphi''(x)=-\frac{2+\varphi'(x)}{x+2\varphi(x)}+\frac{(2x+\varphi(x))(1+2\varphi'(x))}{(x+2\varphi(x))^2}$$

である．$\varphi'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$ かつ $2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\varphi\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$ (複合同順 $\because$ ②) に注意して，

$$\varphi''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}>0$$

$$\varphi''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}<0$$

だから，$y=\varphi(x)$ は**極小値** $\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$，**極大値** $\varphi\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ をとる．

(2)　陰関数 $y=\varphi(x)$ は $f(x,\varphi(x))=0$ を満たすから，

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$$

$$\therefore\ (2x-\varphi(x))+(-x-2\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \cdots ③.$$

ゆえに，極値の候補点において $\varphi'(x)=0$ であるから，③より $2x-\varphi(x)=0\cdots$ ④ を満たす．④を $f(x,\varphi(x))=x^2-x\varphi(x)-\varphi(x)^2+2=0$ に代入して，

$$x^2-x(2x)-(2x)^2+2=0 \quad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

ゆえに，$x=\pm\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$ が $\varphi(x)$ の極値を与える点の候補であり，

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{10}}{5},\quad \varphi\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

を満たす．以下，$\varphi''\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ の符号を調べよう．③より $\varphi'(x)=\dfrac{2x-\varphi(x)}{x+2\varphi(x)}$ だから，

$$\varphi''(x)=\frac{2-\varphi'(x)}{x+2\varphi(x)}-\frac{(2x-\varphi(x))(1+2\varphi'(x))}{(x+2\varphi(x))^2}$$

である．$\varphi'\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=0$ かつ $2\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\right)-\varphi\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=0$ (複号同順 $\because$ ④) に注意して，

$$\varphi''\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=\frac{2}{\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{4\sqrt{10}}{5}}=\frac{2}{\sqrt{10}}>0$$

$$\varphi''\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=\frac{2}{-\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{4\sqrt{10}}{5}}=-\frac{2}{\sqrt{10}}<0$$

だから，$y=\varphi(x)$ は**極小値** $\varphi\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{5}}$，**極大値** $\varphi\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}}$ をとる．　∎

[*1] 変数関数 $\varphi(x)$ の極値判定 $\boxed{\mathbf{2}}$ に従って議論する．

$\boxed{4}$ (★★☆)(陰関数の第 2 次導関数)

2 変数関数 $f(x,y)$ は C^2 級関数（すなわち 2 階までのすべての偏導関数が存在して連続）で，$f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ とする．このとき，$x=a$ の近くで定義された 2 回微分可能な陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在して，

$$\varphi''(x) = -\frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}$$

が成り立つことを示せ．ここで右辺に現れるすべての偏導関数は $(x,\varphi(x))$ における偏導関数である．

解 $f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ であるから，$x=a$ の近くで定義された 2 回微分可能な陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在して

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x))=0 \\ b=\varphi(a) \end{cases}$$

が成り立つ．第 1 式を x で偏微分して，chain rule を使うと

$$f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \cdots ①.$$

さらに①の両辺を x で偏微分して，再び chain rule を使うと

$$\begin{aligned}&\Big(f_{xx}(x,\varphi(x)) + f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\Big)\\ &+\Big(f_{yx}(x,\varphi(x)) + f_{yy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\Big)\varphi'(x) + f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x) = 0 \quad \cdots ②.\end{aligned}$$

また $f(x,y)$ が C^2 級だから，$f_{xy}=f_{yx}\cdots ③$ が成り立つ．括弧内の変数 $(x,\varphi(x))$ を省略して①,②,③をまとめると次を得る：

$$f_x + f_y\varphi'(x) = 0 \quad \cdots ①'$$

$$f_{xx} + 2f_{xy}\varphi'(x) + f_{yy}(\varphi'(x))^2 + f_y\varphi''(x) = 0 \quad \cdots ②'$$

①$'$ から得られる $\varphi'(x) = -f_x/f_y$ を ②$'$ へ代入すれば所望の等式を得る． ∎

Check **一般に $f(x,y)=0$ で定義される $\mathbb{R}^2$ の図形は 1 つの関数 $y=\varphi(x)$ のグラフのみで表現できるとは限らない．たとえば，$f(x,y):=x^2+y^2-1$ とした場合に $\mathbb{R}^2$ の図形 $C: f(x,y)=0$ は単位円を表すが，これは $y=\sqrt{1-x^2}$ と $y=-\sqrt{1-x^2}$ のグラフの和集合になっている．また $f_y(x,y)=2y$ より $f_y(\pm1,0)=0$ だから，点 $(1,0)$，$(-1,0)$ の近くではいかなる関数 $y=\varphi(x)$ で表すことはできない．**