§6　極値問題　演習問題 4

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**臨界点が 1 つの場合の極値問題①**)

次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = -x^2 - 4xy - 6y^2 + 1$.

(2) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1$.

(3) $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

$\boxed{2}$ (★★☆)(**臨界点が 1 つの場合の極値問題②**)

関数 $f(x,y) := (y-x^2)(y-2x^2)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 臨界点は原点だけであるが，$f(0,0)$ は極値でないことを示せ．

(2)† t を固定するとき，関数 $F_t(x) := f(x,tx)$ は $x=0$ で極小であることを示せ．

$\boxed{3}$ (★★☆)(**臨界点が複数ある場合の極値問題**)

次の関数に極値があれば，それを求めよ．

(1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(2)† $f(x,y) = xe^{-2x} + e^{-x}\cos y$.

$\boxed{4}$ (★★★)(**極値点におけるラプラシアンの符号**)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，u を Ω 上の C^2 級関数とする．このとき u が Ω 内の点 $\boldsymbol{a} \in \Omega$ で広義の極大* (極小) となるならば，$\Delta u(\boldsymbol{a}) \leqq (\geqq)\, 0$ となることを示せ．ここに $\Delta u := (\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2)u$ は u の**ラプラシアン**を表す．

*広義の極大 (極小) であるとは，極大 (極小) の定義において，等号を許す場合を表す．