§6 極値問題 演習問題 4 解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★☆☆)(臨界点が 1 つの場合の極値問題①)

次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x,y)=-x^2-4xy-6y^2+1$.

(2) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-2y+1$.

(3) $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$.

解 (1) $f(x,y)=-x^2-4xy-6y^2+1$ に対し，$f_x=-2x-4y$，$f_y=-4x=12y$ だから，臨界点は

$$\begin{cases}-2x-4y=0\\ -4x-12y=0\end{cases}\qquad \therefore\quad (x,y)=(0,0).$$

一方，$f_{xx}=-2$，$f_{xy}=-4$，$f_{yy}=-12$ であるから，Hessian は

$$\mathrm{Hess}_f(0,0)=\begin{pmatrix}-2&-4\\-4&-12\end{pmatrix}.$$

よって $\det \mathrm{Hess}_f(0,0)=8>0$，$(1,1)$成分 $=-2<0$ ゆえ，$\mathrm{Hess}_f(0,0)$ は負定値．したがって，f は**極大値** $f(0,0)=\mathbf{1}$ をとる．

(2) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-2y+1$ に対し $f_x=2x+y-2$，$f_y=x+2y-2$ より f の臨界点は

$$\begin{cases}2x+y-2=0\\ x+2y-2=0\end{cases}\qquad \therefore\quad (x,y)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

一方，$f_{xx}=2$，$f_{xy}=1$，$f_{yy}=2$ であるから，Hessian は

$$\mathrm{Hess}_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

よって，$\det \mathrm{Hess}_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=3>0$，$(1,1)$成分 $=2>0$ ゆえ，$\mathrm{Hess}_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ は正定値．したがって，f は**極小値** $f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ をとる．

(3) $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$ に対して，f の臨界点は $f_x=3e^y-3x^2$，$f_y=3xe^y-3e^{3y}$ より
$\begin{cases}3e^y-3x^2=0 & \cdots ①\\ 3xe^y-3e^{3y}=0 & \cdots ②\end{cases}$ を満たす．①を②へ代入して，$3x^3-3x^6=0$．ゆえに $x=0,1$．

・$x=0$ のとき①を満たす $y\in\mathbb{R}$ は存在しない．

・$x=1$ のとき①より $e^y-1=0$ $\therefore$ $y=0$．

ゆえに，f の臨界点は $(1,0)$ のみ．一方，$f_{xx}=-6x$，$f_{xy}=3e^y$，$f_{yy}=3xe^y-9e^{3y}$ であるから，Hessian は

$$\mathrm{Hess}_f(1,0)=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}.$$

よって $\det \mathrm{Hess}_f(1,0)=27>0$，$(1,1)$成分 $=-6<0$ ゆえ，$\mathrm{Hess}_f(1,0)$ は負定値．したがって，f は**極大値** $f(1,0)=\mathbf{1}$ をとる． ∎

2 (★★☆)(臨界点が 1 つの場合の極値問題②)

関数 $f(x,y):=(y-x^2)(y-2x^2)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 臨界点は原点だけであるが，$f(0,0)$ は極値でないことを示せ．

(2)† t を固定するとき，関数 $F_t(x):=f(x,tx)$ は $x=0$ で極小であることを示せ．

解 (1)　$f(x,y)=(y-x^2)(y^2x^2)$ に対し，

$$f_x=-2x(y-2x^2)+(y-x^2)(-4x)=-2x(3y-4x^2),$$
$$f_y=(y-2x^2)+(y-x^2)=2y-3x^2$$

であるから，$f_x=f_y=0$ を解くと「$x=0$ または $3y-4x^2=0$」かつ $2y-3x^2=0\cdots$① となる．

・$x=0$ のとき，①より $y=0$．

・$3y-4x^2=0$ のとき，$x^2=\frac{3}{4}y$ を①へ代入すると，$y=0$ を得る．

ゆえに $f_x=f_y=0$ を満たす (x,y) は $(0,0)$ のみである．また，

$$f_xx=-2(3y-4x^2)-2x(-8x),\quad f_{xy}=-6x,\quad f_{yy}=2$$

であるから，$\mathrm{Hess}_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$．したがって，$\det \mathrm{Hess}_f(0,0)=0$ となって極値判定法は使えない．ところが $x\neq 0$ のとき

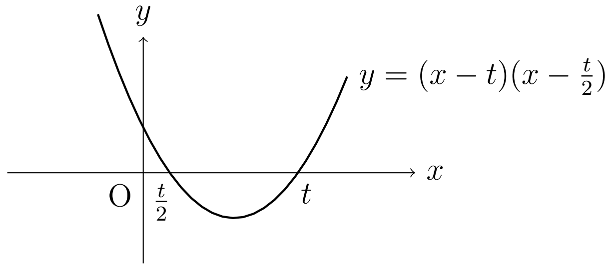
$$f(x,3x^2)=2x^4>0=f(0,0)$$
$$f\left(x,\frac{3}{2}x^2\right)=-\frac{x^4}{2}<0=f(0,0)$$

となり，$f(0,0)$ は極大でも極小ともならない．

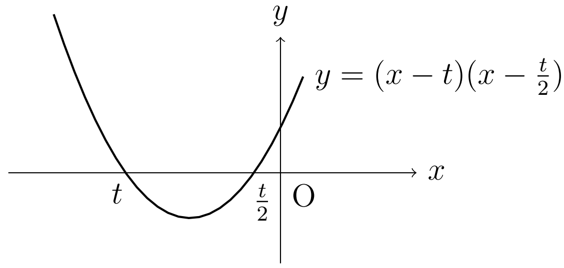
(2)　$F_t(x):=f(x,tx)=x^2(t-x)(t-2x)$ は任意の実数 t に対し，$|x|\neq 0$ が十分小さいとき

$$F_t(x)=2x^2(x-t)\left(x-\frac{t}{2}\right)>0=F_t(0)$$

が成り立つ (次図参照)．ゆえに，$F_t(x)$ は $x=0$ で**極小値 0** をとる．



($t>0$ のとき)



($t<0$ のとき)

■

$\boxed{3}$ (★★☆)(臨界点が複数ある場合の極値問題)

次の関数に極値があれば，それを求めよ．

(1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

(2)† $f(x,y)=xe^{-2x}+e^{-x}\cos y$.

解 (1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ に対し，$f_x=3x^2-3y$，$f_y=3y^2-3x$ だから，f の臨界点は

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad (x,y)=(0,0),\ (1,1).$$

一方，$f_{xx}=6x$，$f_{xy}=-3$，$f_{yy}=6y$ であるから，Hessian は

$$\mathrm{Hess}_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Hess}_f(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(i) $\det \mathrm{Hess}_f(0,0)=0$ だから，$\mathrm{Hess}_f(0,0)$ は不定符号．ここで

・$x>0$ のとき $f(x,x)=-x^3<0=f(0,0)$

・$x<0$ のとき $f(x,x)=-x^3>0=f(0,0)$

ゆえ，$f(0,0)$ は極大値，極小値ともならない．

(ii) $\det \mathrm{Hess}_f(1,1)=27>0$ であり，$(1,1)$成分 $=6>0$ ゆえ $\mathrm{Hess}_f(0,0)$ は正定値．したがって，$f(1,1)=-1$ は極小値．

以上より，f の臨界点 $(0,0)$, $(1,1)$ に対し $f(0,0)$ は極値でなく，$f(1,1)=\mathbf{-1}$ は**極小値**.

(2) $f(x,y)=xe^{-2x}+e^{-x}\cos y$ に対して，$f_x=(1-2x)e^{-2x}-e^{-x}\cos y$，$f_y=-e^{-x}\sin y$ だから f の臨界点は $\begin{cases} (1-2x)e^{-x}-\cos y=0 & \cdots ① \\ \sin y=0 & \cdots ② \end{cases}$ を満たす．②より $y=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$．これを①へ代入：

$$(1-2x)e^{-x}-(-1)^n=0 \quad \cdots ③.$$

n の偶奇に分けて，この方程式の実数解 x を求める．

・n が偶数のとき，③ $\iff$ $1-2x-e^x=0\cdots$④．そこで $\varphi(x):=1-2x-e^x$ とおくと $\varphi'(x)=-2-e^{-x}<0$ より $\varphi(x)$ は単調減少であり，$\varphi(0)=0$，$\lim_{x\to+\infty}=-\infty$ だから，④を満たす実数解は $x=0$ のみであることがわかる．

・n が奇数のとき，③ $\iff$ $1-2x+e^x=0\cdots$⑤．$\psi(x):=1-2x+e^x$ とおくと $\psi'(x)=e^x-2$ であるから，$\psi(x)$ の増減表は下のようになる．

x	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$\psi'(x)$	$-$	0	$+$
$\psi(x)$	$\searrow$	$3-2\log 2$	$\nearrow$

よって $\psi(x)$ は $x=\log 2$ で極小かつ最小となって，

$$\psi(\log 2)=3-2\log 2>3-2\log e=1>0$$

だから，すべての $x\in\mathbb{R}$ に対し $\psi(x)>0$．ゆえに⑤を満たす実数解 x は存在しない．

以上の議論から，f の臨界点は

$$(x,y)=(0,2m\pi)\quad(m\in\mathbb{Z}).$$

次に，$f_{xx}=(-4+4x)e^{-2x}+e^{-x}\cos y$，$f_{xy}=e^{-x}\sin y$，$f_{yy}=-e^{-x}\cos y$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_f(0,2m\pi)&=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{2m} & 0\\ 0 & -(-1)^{2m}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\det\mathrm{Hess}_f(0,2m\pi)=3>0$ であり，$(1,1)$成分 $=-3<0$ だから $\mathrm{Hess}_f(0,2m\pi)$ は負定値．ゆえに，f は $(0,2m\pi)$ で極大値 $f(0,2m\pi)=(-1)^{2m}=1$ をとる．

以上より，f は**極大値** $f(0,2m\pi)=\mathbf{1}$ をとる． ■

4 (★★★)(極値点におけるラプラシアンの符号)

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とし，u を Ω 上の C^2 級関数とする．このとき u が Ω 内の点 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ で広義の極大[a] (極小) となるならば，$\Delta u(\boldsymbol{a})\leqq(\geqq)\,0$ となることを示せ．ここに $\Delta u:=(\partial_{x_1}^2+\cdots+\partial_{x_n}^2)u$ は u の**ラプラシアン**を表す．

[a]広義の極大 (極小) であるとは，極大 (極小) の定義において，等号を許す場合を表す．

解 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$，$\varepsilon>0$ とする．次に $x_1\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$ に対し

$$\varphi_1(x_1):=u(x_1,a_2,\ldots,a_n)$$

とおく．仮定より，$\varphi_1(x)$ は 2 回微分可能であり，$x_1=a_1$ で広義の極大となるから，

$$\varphi_1''(a_1)\leqq 0\iff\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a})\leqq 0$$

が成り立つ．一般に $i = 1, \dots, n$ に対して，$\varphi_i(x_i) := u(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$ とおくとき，上と同様の議論により

$$\varphi_i''(a_i) \leqq 0 \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a}) \leqq 0 \quad \cdots ①$$

が導かれる．したがって①を $i = 1, \dots, n$ で足し合わせれば，$\Delta u(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a}) \leqq 0$.

広義の極小の場合を示すときは，上の議論をそのまま $-u$ にあてはめて行えばよい． ■

Check $\Delta u(\boldsymbol{a}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}_u(\boldsymbol{a}))$：$\mathrm{Hess}_u(\boldsymbol{a})$ **のトレース (跡) と表されることに注意.**