極値問題　演習問題３　解答

問 1. 半径 1 に内接する三角形の中で面積最大となる三角形は存在するか，さらに存在するとすればどのような三角形か求めよ．
（Hint：半径 1 の円に内接する三角形の 3 つの角の大きさをそれぞれ x, y, $\pi-x-y$ $(0<x<\pi$, $0<y<\pi$, $0<x+y<\pi)$ とするとき，その三角形の面積は $2\sin x\,\sin y\,\sin(\pi-x-y)=2\sin x\,\sin y\,\sin(x+y)$ で与えられる（正弦定理のちょっとした応用である）．したがって，$D=\{(x,y)\colon 0<x<\pi, 0<y<\pi, <x+y<\pi\}$, $f(x,y)=\sin x\,\sin y\,\sin(x+y)$ とおいたとき，$f(x,y)$ が D において最大値をもつか調べ，もし最大値をもつならばその最大値をとる (x,y) に対応する三角形を答えればよい．）

解答. D の境界を ∂D とし，$\overline{D}=D\cup\partial D$ とする．すなわち

$$\partial D=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le\pi\}\cup\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le y\le\pi\}\cup\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, x+y=\pi\},$$
$$\overline{D}=\{(x,y)\colon 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi, 0\le x+y\le\pi\}.$$

$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上連続であるから，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ において最大値をもつ．ここで，任意の $(x,y)\in D$ に対し $f(x,y)>0$ であり，どんな $(x,y)\in\partial D$ に対しても $f(x,y)=0$ とわかるから，$f(x,y)$ の $\overline{D}$ における最大値を実現する点は，D に属す．よって $f(x,y)$ は D においても最大値をもち，とくにそれは極大値でもある．一方，$f(x,y)$ が D において極値をとる点の候補は，連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= (\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y))\sin y=\sin(2x+y)\sin y=0\\ f_y(x,y) &= (\cos y\sin(x+y)+\sin y\cos(x+y))\sin x=\sin(x+2y)\sin x=0\end{cases}$$

を解いて，$(x,y)=(\pi/3,\pi/3)$ のみだとわかる．以上より，$f(x,y)$ は D において $(x,y)=(\pi/3,\pi/3)$ のとき最大となる．対応する三角形は，$x=y=\pi-x-y=\pi/3$ のとき，すなわち正三角形である． ■