# 極値問題　問題 2　解答

[1] 次の関数の極値を求めよ.

$f(x,y)=2x^4-6x^2y^2+5y^4$

[解]: はじめに極値の候補となる点を求める.

$$f_x=8x^3-12xy^2,\quad f_y=-12x^2y+20y^3$$

より, $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる点を求めると,

$$(x,y)=(0,0)$$

のみが極値の候補である. 次に 2 階偏導関数は

$$f_{xx}=12\left(2x^2-y^2\right),\quad f_{yy}=12\left(-x^2+5y^2\right),\quad f_{xy}=-24xy$$

であるから, Hessian $\Delta$ を求めると,

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-576x^2y^2+144\left(-x^2+5y^2\right)\left(2x^2-y^2\right).$$

しかし, $(x,y)=(0,0)$ のとき, $\Delta(0,0)=0$ となり, Hessian $\Delta$ による極値の判定は行えない. そこで関数 $f(x,y)$ を $x^2$ に関する平方完成によって式変形すると,

$$f(x,y)=2\left(x^2-\frac{3}{2}y^2\right)^2+\frac{1}{2}y^4$$

となる. したがって任意の $x,y$ に対して $f(x,y)\geq 0=f(0,0)$ であるから, 極値の定義より $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において極小値 $f(0,0)=0$ を持つ.

[2] 次の関数は極値を持たないことを示せ.

$f(x,y)=x^3-y^2$

[解]:

$$f_x=3x^2,\quad f_y=-2y,\quad \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-12x,$$

より $f_x=f_y=0$ を解くと, 極値の候補となる点は $(x,y)=(0,0)$ の一つだけである. この点が極値でないことを示せば良い. しかし, このとき $\Delta(0,0)=0$ となり, Hessian $\Delta$ による極値の判定は行えない. そこで $y=0$ として $x$ 軸に沿って考えると, $f(x,0)=x^3$ となって $f$ は $x$ の 3 次関数となる. ここで $f(0,0)=0$ かつ, 正の実数 $a>0$ に対して $f(a,0)=a^3>0, f(-a,0)=-a^3<0$ となるため, 不等式

$$f(-a,0)<f(0,0)<f(a,0)$$

が成り立つ. この不等式はどの正の実数 $a$ に対しても成り立つので, どの原点を含む近傍においても, 原点 $(0,0)$ で $f(x,y)$ は最小値も最大値もとらない. したがって, 極値の定義より $f(x,y)$ は極値を持たない.