極値問題　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x+2y+2$

$$\begin{cases} f_x=2x+y-3=0 \\ f_y=x+2y+2=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y)=\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$ を得る。

$$f_{xx}=2,\ f_{xy}=1,\ f_{yy}=2$$

より

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=2\times 2-1^2=4-1=3>0$$

となるので，上記の点で f は極値を取る。$f_{xx}=2>0$ だからその極値は極小値である。

$$f\left(\frac{8}{3},-\frac{7}{3}\right)=-\frac{13}{3}$$

以上により，$f(x,y)$ は $(x,y)=\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$ において極小値 $-\dfrac{13}{3}$ を取る。

(2) $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-5x+4y+1$

$$\begin{cases} f_x=6x-2y-5=0 \\ f_y=-2x+2y+4=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y)=\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{7}{4}\right)$ を得る。

$$f_{xx}=6,\ f_{xy}=-2,\ f_{yy}=2$$

より

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=6\times 2-(-2)^2=12-4=8>0$$

となるので，上記の点で f は極値を取る。$f_{xx}=6>0$ だからその極値は極小値である。

$$f\left(\frac{1}{4},-\frac{7}{4}\right)=-\frac{25}{8}$$

以上により，$f(x,y)$ は $(x,y)=\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{7}{4}\right)$ において極小値 $-\dfrac{25}{8}$ を取る。

(3) $f(x,y)=2x^2+5xy+y^2-3x-2y+3$

$$f_x=4x+5y-3,\ f_y=5x+2y-2,\ f_{xx}=4,\ f_{xy}=5,\ f_{yy}=2$$

より，どの点においても

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=4\times 2-5^2=8-25<0$$

となるので，f は極値を持たない。

(4) $f(x,y)=4x^2+3xy+y^2+2x-5$

$$\begin{cases} f_x = 8x+3y+2=0 \\ f_y = 3x+2y=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y)=\left(-\dfrac{4}{7},\dfrac{6}{7}\right)$ を得る。

$$f_{xx}=8,\ f_{xy}=3,\ f_{yy}=2$$

より

$$\Delta = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 8\times 2-3^2 = 16-9>0$$

となるので，上記の点で f は極値を取る。$f_{xx}=8>0$ だからその極値は極小値である。

$$f\left(-\frac{4}{7},\frac{6}{7}\right) = -\frac{39}{7}$$

以上により，$f(x,y)$ は $(x,y)=\left(-\dfrac{4}{7},\dfrac{6}{7}\right)$ において極小値 $-\dfrac{39}{7}$ を取る。

(5) $f(x,y)=x^2+3xy+y^2-x-2y+4$

$$f_x=2x+3y-1,\ f_y=3x+2y-2,\ f_{xx}=2,\ f_{xy}=3,\ f_{yy}=2$$

より，どの点においても

$$\Delta = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 2\times 2-3^2 = 4-9<0$$

となるので，f は極値を持たない。

(6) $f(x,y)=2x^2+3xy-y^2+4x-3y+3$

$$f_x=4x+3y+4,\ f_y=3x-2y-3,\ f_{xx}=4,\ f_{xy}=3,\ f_{yy}=-2$$

より，どの点においても

$$\Delta = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 4\times(-2)-3^2<0$$

となるので，f は極値を持たない。

(7) $f(x,y)=-3x^2+5xy+2y^2-x-y+2$

$$f_x=-6x+5y-1,\ f_y=5x+4y-1,\ f_{xx}=-6,\ f_{xy}=5,\ f_{yy}=4$$

より，どの点においても

$$\Delta = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = (-6)\times 4-5^2<0$$

となるので，f は極値を持たない。

(8) $f(x,y) = -4x^2 + 3xy - y^2 + 5x - 3y - 1$

$$\begin{cases} f_x = -8x + 3y + 5 = 0 \\ f_y = 3x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y) = \left(\dfrac{1}{7}, -\dfrac{9}{7}\right)$ を得る。

$$f_{xx} = -8,\ f_{xy} = 3,\ f_{yy} = -2$$

より

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-8) \times (-2) - 3^2 = 16 - 9 > 0$$

となるので，上記の点で f は極値を取る。$f_{xx} = -8 < 0$ だからその極値は極大値である。

$$f\left(\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}\right) = \frac{9}{7}$$

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{1}{7}, -\dfrac{9}{7}\right)$ において極大値 $\dfrac{9}{7}$ を取る。

(9) $f(x,y) = -3x^2 - 6xy - 2y^2 + 2x - y - 4$

$$f_x = -6x - 6y + 2,\ f_y = -6x - 4y - 1,\ f_{xx} = -6,\ f_{xy} = -6,\ f_{yy} = -4$$

より，どの点においても

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6) \times (-4) - (-6)^2 = 24 - 36 < 0$$

となるので，f は極値を持たない。

(10) $f(x,y) = -3x^2 + 5xy - 4y^2 + 2x + y - 3$

$$\begin{cases} f_x = -6x + 5y + 2 = 0 \\ f_y = 5x - 8y + 1 = 0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y) = \left(\dfrac{21}{23}, \dfrac{16}{23}\right)$ を得る。

$$f_{xx} = -6,\ f_{xy} = 5,\ f_{yy} = -8$$

より

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6) \times (-8) - 5^2 = 48 - 25 > 0$$

となるので，上記の点で f は極値を取る。$f_{xx} = -6 < 0$ だからその極値は極大値である。

$$f\left(\frac{21}{23}, \frac{16}{23}\right) = -\frac{40}{23}$$

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{21}{23}, \dfrac{16}{23}\right)$ において極大値 $-\dfrac{40}{23}$ を取る。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $f(x,y) = x^3 + xy - 2y^2 + 3$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y = 0 & \cdots ① \\ f_y = x - 4y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

②より $x = 4y$, これを①に代入して

$$\begin{aligned} 3(4y)^2 + y &= 0 \\ y(48y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

これより $y = 0, -\dfrac{1}{48}$ となるので，$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) は

$$(x,y) = (0,0),\ \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{48}\right)$$

の 2 点である。

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = -4$$

だから,

$$\begin{aligned} \Delta(0,0) &= f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 0 - 1 < 0, \\ \Delta\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{48}\right) &= f_{xx}\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{48}\right) f_{yy}\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{48}\right) - \left(f_{xy}\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{48}\right)\right)^2 \\ &= \left(-\frac{6}{12}\right) \times (-4) - 1^2 = 2 - 1 > 0 \end{aligned}$$

となる。したがって $f(x,y)$ は $(0,0)$ では極値を取らず，$\left(-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{48}\right)$ で極値を取る。

$f_{xx}\left(-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{48}\right) = -\dfrac{1}{2} < 0$ だからその極値は極大値である。

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y) = \left(-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{48}\right)$ において極大値を取る。

(2) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 - y - 2$

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 & \cdots ① \\ f_y = -2x + 3y^2 - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $x = y$, これを②に代入して

$$\begin{aligned} 3y^2 - 2y - 1 &= 0 \\ (3y + 1)(y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

これより $y = 1, -\dfrac{1}{3}$ となるので，$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) は

$$(x,y) = (1,1),\ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

の 2 点である。

$$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = -2,\ f_{yy} = 6y$$

だから,

$$\begin{aligned}
\Delta(1,1) &= f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - (f_{xy}(1,1))^2 = 2 \times 6 - (-2)^2 > 0, \\
\Delta\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) &= f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) f_{yy}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - \left(f_{xy}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right)^2 \\
&= 2 \times \left(-\frac{6}{3}\right) - (-2)^2 < 0
\end{aligned}$$

となる。したがって $f(x,y)$ は $(1,1)$ で極値を取り, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ では極値を取らない。
$f_{xx}(1,1) = 2 > 0$ だからその極値は極小値である。
以上より, $f(x,y)$ は $(x,y) = (1,1)$ において極小値を取る。

(3) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + y^3 - 9y + 1$

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y^2 = 0 & \cdots ① \\ f_y = -12xy + 3y^2 - 9 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $x^2 = y^2$, したがって $x = \pm y$ である。$x = y$ を②に代入して

$$\begin{aligned}
&-12y^2 + 3y^2 - 9 = 0 \\
&-9(y^2 + 1) = 0
\end{aligned}$$

これは解を持たない。$x = -y$ を②に代入して

$$\begin{aligned}
&12y^2 + 3y^2 - 9 = 0 \\
&3(5y^2 - 3) = 0
\end{aligned}$$

これより $y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ となるので, $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) は

$$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

の 2 点である。

$$f_{xx} = 12x,\ f_{xy} = -12y,\ f_{yy} = -12x + 6y$$

である。すると $(x,y) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ において $f_{xx} > 0, f_{yy} < 0$ となるので

$$\Delta\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = f_{xx}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) f_{yy}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - \left(f_{xy}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)^2 < 0$$

がわかる。同様に $(x,y)=\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ においては $f_{xx}<0, f_{yy}>0$ となるので，やはり

$$\Delta\left(\sqrt{-\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)<0$$

となる。したがって $f(x,y)$ は極値を取らない。

(4) $f(x,y)=2x^3-3xy+2y^3+5$

$$\begin{cases} f_x=6x^2-3y=0 & \cdots ① \\ f_y=-3x+6y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $y=2x^2$, これを②に代入して

$$\begin{aligned} &-3x+6(2x^2)^2=0 \\ &6\cdot 4x^4-3x=0 \\ &3x(8x^3-1)=0 \end{aligned}$$

これより $x=0,\frac{1}{2}$ となるので，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる (x,y) は

$$(x,y)=(0,0),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

の 2 点である。

$$f_{xx}=12x,\ f_{xy}=-3,\ f_{yy}=12y$$

だから，

$$\begin{aligned} \Delta(0,0)&=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-(f_{xy}(0,0))^2=0-(-3)^2<0, \\ \Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)&=f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)f_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\left(f_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\ &=6\times 6-(-3)^2=36-9>0 \end{aligned}$$

となる。したがって $f(x,y)$ は $(0,0)$ では極値を取らず，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ で極値を取る。$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=6>0$ だからその極値は極小値である。

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ において極小値を取る。

(5) $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^2-\frac{y}{2}-3$

$$\begin{cases} f_x=3x^2+4xy=0 & \cdots ① \\ f_y=2x^2-2y-\frac{1}{2}=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$x(3x+4y)=0,$$

よって $x=0,-\frac{4}{3}y$ である。$x=0$ を②に代入すると

$$-2y-\frac{1}{2}=0$$

これより $y=-\frac{1}{4}$ を得る。また $x=-\frac{4}{3}y$ を②に代入すると

$$\begin{aligned} 2\left(-\frac{4}{3}y\right)^2-2y-\frac{1}{2}=0 \\ \frac{32}{9}y^2-2y-\frac{1}{2}=0 \end{aligned}$$

これを解いて $y=-\frac{3}{16},\frac{3}{4}$ を得る。それぞれに対応する x の値は $\frac{1}{4},-1$ となるので，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる (x,y) は

$$(x,y)=\left(0,-\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{4},-\frac{3}{16}\right),\ \left(-1,\frac{3}{4}\right)$$

の 3 点である。

$$f_{xx}=6x+4y,\ f_{xy}=4x,\ f_{yy}=-2$$

だから，

$$\begin{aligned} \Delta\left(0,-\frac{1}{4}\right)&=(-1)\times(-2)-0^2=2>0, \\ \Delta\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{16}\right)&=\frac{3}{4}\times(-2)-1^2<0, \\ \Delta\left(-1,\frac{3}{4}\right)&=(-3)\times(-2)-(-4)^2=6-16<0 \end{aligned}$$

となる。したがって $f(x,y)$ は $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ で極値を取り，$\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{16}\right)$, $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ では極値を取らない。$f_{xx}\left(0,-\frac{1}{4}\right)=-1<0$ だからその極値は極大値である。

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y)=\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ において極大値を取る。

(6) $f(x,y)=x^3+3x^2y+5y^2+2y-1$

$$\begin{cases} f_x=3x^2+6xy=0 & \cdots ① \\ f_y=3x^2+10y+2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$3x(x+2y)=0,$$

よって $x=0,-2y$ である。$x=0$ を②に代入すると

$$10y+2=0$$

これより $y=-\dfrac{1}{5}$ を得る。また $x=-2y$ を②に代入すると

$$\begin{aligned}
&3(-2y)^2+10y+2=0\\
&12y^2+10y+2=0\\
&(2y+1)(3y+1)=0
\end{aligned}$$

これを解いて $y=-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}$ を得る。それぞれに対応する x の値は $1,\dfrac{2}{3}$ となる。したがって $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる (x,y) は

$$(x,y)=\left(0,-\frac{1}{5}\right),\ \left(1,-\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

の 3 点である。

$$f_{xx}=6x+6y,\ f_{xy}=6x,\ f_{yy}=10$$

だから,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(0,-\frac{1}{5}\right)&=\left(-\frac{6}{5}\right)\times 10-0^2<0,\\
\Delta\left(1,-\frac{1}{2}\right)&=3\times 10-6^2=30-36<0,\\
\Delta\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)&=2\times 10-4^2=20-16>0
\end{aligned}$$

となる。したがって $f(x,y)$ は $\left(0,-\dfrac{1}{5}\right),\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$ では極値を取らず, $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ で極値を取る。$f_{xx}\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)=2>0$ だからその極値は極小値である。

以上より, $f(x,y)$ は $(x,y)=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ において極小値を取る。

(7) $f(x,y)=x^4-2x^2y+3y^2-y+1$

$$\begin{cases}
f_x=4x^3-4xy=0 & \cdots ①\\
f_y=-2x^2+6y-1=0 & \cdots ②
\end{cases}$$

①より

$$4x(x^2-y)=0,$$

よって $x=0$ または $x^2=y$ である。$x=0$ を②に代入すると

$$6y-1=0$$

これより $y=\dfrac{1}{6}$ を得る。また $x^2=y$ を②に代入すると

$$\begin{aligned}
-2y+6y-1&=0\\
4y-1&=0
\end{aligned}$$

これより $y = \dfrac{1}{4}$ を得る。このときの x は

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

をみたすので，$x = \pm\dfrac{1}{2}$ を得る。したがって $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる (x, y) は

$$(x, y) = \left(0, \frac{1}{6}\right),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

の 3 点である。

$$f_{xx} = 12x^2 - 4y,\ f_{xy} = -4x,\ f_{yy} = 6$$

だから，

$$\begin{aligned}
\Delta\left(0, \frac{1}{6}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right) \times 6 - 0^2 < 0, \\
\Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) &= 2 \times 6 - (-2)^2 = 12 - 4 > 0, \\
\Delta\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) &= 2 \times 6 - 2^2 = 12 - 4 > 0
\end{aligned}$$

となる。したがって $f(x, y)$ は $\left(0, \dfrac{1}{6}\right)$ では極値を取らず，$\left(\pm\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ で極値を取る。

$f_{xx}\left(\pm\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right) = 2 > 0$ だからその極値はともに極小値である。

以上より，$f(x, y)$ は $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ においていずれも極小値を取る。

(8) $f(x, y) = x^4 - 2xy + y^3$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2y = 0 & \cdots ① \\ f_y = -2x + 3y^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $y = 2x^3$, これを②に代入すると

$$\begin{aligned}
-2x + 3(2x^3)^2 &= 0 \\
x(6x^5 - 1) &= 0
\end{aligned}$$

これより $x = 0, \dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}$ を得る。それぞれに対応する y の値は $y = 0, \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}^3}$ となる。したがって $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる (x, y) は

$$(x, y) = (0, 0),\ \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}, \frac{2}{\sqrt[5]{6}^3}\right)$$

の 2 点である。

$$f_{xx} = 12x^2,\ f_{xy} = -2,\ f_{yy} = 6y$$

だから，

$$\Delta(0,0) = 0 - (-2)^2 < 0,$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}, \frac{2}{\sqrt[5]{6}^3}\right) = \frac{12}{\sqrt[5]{6}^2} \times \frac{12}{\sqrt[5]{6}^3} - (-2)^2 > 0 = \frac{12 \times 12}{6} - 4 = 24 - 4 > 0$$

となる。したがって $f(x,y)$ は $(0,0)$ では極値を取らず，$\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}, \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}^3}\right)$ で極値を取る。

$f_{xx}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}, \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}^3}\right) = \dfrac{12}{\sqrt[5]{6}^2} > 0$ だからその極値は極小値である。

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}, \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}^3}\right)$ において極小値を取る。