§5 高次偏導関数, 微分の順序交換, Taylor の定理 演習問題 3

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★☆☆)(**Maclaurin の定理**) 次の関数の Maclaurin 展開を 2 次の項まで書き表せ.

(1) $f(x,y) = e^{x+2y}$ (2) $f(x,y) = e^{x-y}$

2 (★☆☆)(**Taylor の定理の応用**) $z = f(x,y)$ を x, y の C^2 級関数で, $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$ を満たすとする. このとき, $z = ax + by + c$ (a, b, c は定数) と表せることを示せ.

3 (★★☆)(**ラプラシアン**) n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し,

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

を**ラプラシアン**という. C^2 級関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が $\Delta f = 0$ を満たすとき, f は**調和関数**という. 次の関数は調和関数であることを確かめよ.

(1) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$

(2) $f(x,y) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

(3) $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{2-n}{2}} \quad ((x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0))$

4 (★★★)(**3 次元極座標によるラプラシアンの表示**) 3 次元極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ (ただし, $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$) において, 3 次元ラプラシアン $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ が

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \quad \cdots \star$$

で与えられることを示したい. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) **円柱座標**: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ (ただし, $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$) でのラプラシアンの表示が

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \cdots a$$

で与えられることを右辺から左辺への変形によって示せ.

(2) 円柱座標系において，$z = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi \cdots$ ① とおくことにより，円柱座標から極座標へ変換する．

(i) ①の変換のもと，$\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$，$\dfrac{\partial}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ を用いて表せ．

(ii) r_ρ，θ_ρ を求めることにより，Chain rule を用いて $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ を $\dfrac{\partial}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ を用いて表せ．

(iii) (i), (ii) の結果およびⓐを用いて，所望の等式 ☆ を示せ．