§5 高次偏導関数, 微分の順序交換, Taylor の定理 演習問題 2

✐ **問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★**

1 (★☆☆)(**偏微分作用素①**) 以下の問いに答えよ.

(1) f は C^2 級とする. $\left(3\dfrac{\partial}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$ を f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて表せ.

(2) $\left(3\dfrac{\partial}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 e^{x+2y}$ を求めよ.

2 (★☆☆)(**熱方程式**) $t>0$, $-\infty<x<+\infty$ で定義された関数 $u(t,x)$ に対して

$$u_t(t,x)=u_{xx}(t,x),\quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R} \tag{H}$$

を (1 次元) **熱方程式**という. **熱核**とよばれる関数

$$p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

は熱方程式 (H) を満たすことを示せ.

3 (★★☆)(**chain rule**) $f(r)$ は 1 変数 r のなめらかな関数とする. 3 変数関数 $u(x,y,z)$ を

$$u(x,y,z):=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

で定義する. このとき,

$$(\Delta u=)\ u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$$

となることを示せ.

4 (★★☆)(**偏微分作用素②**) $f(x,y,z)$ はなめらかな関数とし, 2 つの偏微分作用素 Δ, D を f に対して,

$$\Delta f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$Df:=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

で定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\Delta(Df)=D(\Delta f)+2\Delta f$ を示せ.

(2) $\Delta f=0$ のとき, $\Delta\left((x^2+y^2+z^2)f\right)$ を f と DF を用いて表せ.

(3) $\Delta f=0$ のとき, $\Delta\left[\Delta\left((x^2+y^2+z^2)f\right)\right]=0$ であることを示せ.