高階偏導関数，微分の順序交換，テイラーの定理　演習問題１

問 1． 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\ \text{のとき}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\ \text{のとき}\end{cases}$$

に対して，以下の問に答えよ．

(i) $b\in\mathbb{R}$ とする．$f_x(0,b)$ を求めよ．

（Hint： $b\neq 0$ の場合は $f(x,b)$ に商の微分公式を使ったあと $x=0$ を代入して求めてもよいが，$b=0$ のときには使えない．ここでは偏微分係数の定義

$$f_x(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

にしたがって求めてみよ．）

(ii) $f_{xy}(0,0)$ を求めよ．（Hint： ここでも $f_{xy}(0,0)$ の定義にしたがって求めてみよ．）

(iii) (i), (ii) と同様にして，$f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

問 2． $a,b\in\mathbb{R}$ と C^1 級の関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

と定める．$f(x,y)=x^2+e^y+\sin(x+y)$ のとき，以下の問に答えよ．

(i) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$ を求めよ．

(ii) (i) で求めた 2 変数関数を $g(x,y)$ とおく．$\left(3\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\right)g(x,y)$ を求めよ．

(iii) $3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．