§5 高次偏導関数，微分の順序交換，Taylor の定理 演習問題 3 解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(Maclaurin の定理)

次の関数の Maclaurin 展開を 2 次の項まで書き表せ．

(1) $f(x,y) = e^{x+2y}$　　(2) $f(x,y) = e^{x-y}$

解 (1)　記号の簡素化のため，$D_x := \dfrac{\partial}{\partial x}$ とおく．$f(x,y) = e^{x+2y}$ に対して各偏導関数を計算しておこう．f はなめらかだから，偏微分の順序交換が可能である．

$$D_x f = D_x^2 f = e^{x+2y}$$
$$D_y f = 2e^{x+2y}, \quad D_y^2 f = 4e^{x+2y}$$
$$D_x D_y f = 2e^{x+2y}$$

である．ゆえに，

$$(hD_x + kD_y)^0 f(x,y) = e^{x+2y}$$
$$(hD_x + kD_y)^1 f(x,y) = (h+2k)e^{x+2y}$$
$$\begin{aligned}(hD_x + kD_y)^2 f(x,y) &= (h^2 D_x^2 + 2hkD_xD_y + k^2 D_y^2) f \\ &= (h^2 + 4hk + 4k^2)e^{x+2y}.\end{aligned}$$

したがって，Maclaurin の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$e^{h+2k} = \sum_{j=0}^{1} \frac{1}{j!}(hD_x + kD_y)^j f(0,0) + \frac{1}{2!}(hD_x + kD_y)^2 f(\theta h, \theta k) \tag{0.1}$$
$$= 1 + h + 2k + \frac{1}{2}(h^2 + 4hk + 4k^2)e^{\theta h + 2\theta k} \tag{0.2}$$

すなわち

$$\boldsymbol{e^{x+2y} = 1 + x + 2y + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2)e^{\theta x + 2\theta y}.}$$

(2)　同様にして，$f(x,y) = e^{x-y}$ に対し

$$D_x f = D_x^2 f = e^{x-y}$$
$$D_y f = -e^{x-y}, \quad D_y^2 f = e^{x-y}$$
$$D_x D_y f = -e^{x-y}$$

である．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
(hD_x+kD_y)^1 f(x,y) &= (h-k)e^{x-y} \\
(hD_x+kD_y)^2 f(x,y) &= (h^2D_x^2+2hkD_xD_y+k^2D_y^2)f \\
&= (h^2-2hk+k^2)e^{x-y}.
\end{aligned}
$$

したがって，Maclaurin の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
e^{h-k} &= \sum_{j=0}^{1} \frac{1}{j!}(hD_x+kD_y)^j f(0,0) + \frac{1}{2!}(hD_x+kD_y)^2 f(\theta h, \theta k) \\
&= 1+h-k+\frac{1}{2}(h^2-2hk+k^2)e^{\theta h-\theta k}
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\boldsymbol{e^{x-y} = 1+x-y+\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)e^{\theta x-\theta y}.}
$$

■

2 (★☆☆)(Taylor の定理の応用)

$z=f(x,y)$ を x, y の C^2 級関数で，$f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=0$ を満たすとする．このとき，$z=ax+by+c$ $(a,b,c$ は定数$)$ と表せることを示せ．

解 $z=f(x,y)$ は C^2 級であるから，偏微分の順序交換が可能である．2 次の項までの Taylor の定理 (Maclaurin の定理) および仮定の $f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=0$ を用いると

$$
\begin{aligned}
z &= f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)+\frac{1}{2}\left(x^2f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2f_{yy}(\theta x,\theta y)\right) \\
&= f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0).
\end{aligned}
$$

したがって，$a=f_x(0,0)$，$b=f_y(0,0)$，$c=f(0,0)$ とおくと $z=ax+by+c$ と表される． ■

3 (★★☆)(ラプラシアン)

n 変数 $x_1,\ldots,x_n$ に対し，

$$
\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}
$$

を**ラプラシアン**という．C^2 級関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が $\Delta f=0$ を満たすとき，f は**調和関数**という．次の関数は調和関数であることを確かめよ．

(1) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad ((x,y)\neq(0,0))$

(2) $f(x,y)=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ $\quad (x\neq 0)$

(3) $f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$ $\quad ((x_1,\ldots,x_n)\neq(0,\ldots,0))$

解 (1) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ に対し,

$$f_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f_{xx}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

同様に, $f_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_{yy}=\dfrac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}$ であるから,

$$\Delta f=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

(2) $f(x,y)=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ $(x\neq 0)$ に対し,

$$f_x=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)_x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad f_{xx}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

同様に $f_y=\dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)_y}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f_{yy}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ であるから,

$$\Delta f=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

(3) $f(x_1,\dots,x_n)=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$ $((x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0))$ について,各 $k=1,\dots,n$ に対し

$$\begin{aligned}f_{x_k}&=\frac{2-n}{2}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{2-n}{2}-1}\cdot 2x_k\\&=(2-n)\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}}x_k\quad\cdots①\end{aligned}$$

したがって,①より

$$\begin{aligned}f_{x_kx_k}&=(2-n)\left[-\frac{n}{2}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}2x_k^2+\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right]\\&=(2-n)\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\left[-nx_k^2+\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\right].\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\Delta f=\sum_{k=1}^n f_{x_kx_k}&=(2-n)\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\underbrace{\left[-n\sum_{k=1}^n x_k^2+\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\cdot n\right]}_{=0}\\&=0.\end{aligned}$$

∎

4 (★★★)(3 次元極座標によるラプラシアンの表示)

3 次元極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ (ただし，$r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$) において，3 次元ラプラシアン $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ が

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \quad \cdots ⍟$$

で与えられることを示したい．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) **円柱座標**：$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ (ただし，$\rho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$) でのラプラシアンの表示が

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \cdots ⓐ$$

で与えられることを右辺から左辺への変形によって示せ．

(2) 円柱座標系において，$z = r\cos\theta$, $\rho = r\sin\theta$, $\varphi = \varphi \cdots$ ① とおくことにより，円柱座標から極座標へ変換する．

(i) ①の変換のもと，$\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ を用いて表せ．

(ii) r_ρ, θ_ρ を求めることにより，Chain rule を用いて $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ を $\dfrac{\partial}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ を用いて表せ．

(iii) (i), (ii) の結果およびⓐを用いて，所望の等式 ⍟ を示せ．

解 記号の簡略化のため，$\partial_r = \dfrac{\partial}{\partial r}$, $\partial_{rr} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$ などと表す．

(1) 円柱座標 $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ (ただし，$\rho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$) において，$x_\rho = \cos\varphi$, $y_\rho = \sin\varphi$, $z_\rho = 0$ および $x_\varphi = -\rho\sin\varphi$, $y_\varphi = \rho\cos\varphi$, $z_\varphi = 0$ となる．すると Chain rule から

$$\partial_\rho = \partial_x x_\rho + \partial_y y_\rho + \partial_z z_\rho = (\cos\varphi)\partial_x + (\sin\varphi)\partial_y \quad \cdots ㋐$$

$$\partial_\varphi = \partial_x x_\varphi + \partial_y y_\varphi + \partial_z z_\varphi = (-\rho\sin\varphi)\partial_x + (\rho\cos\varphi)\partial_y \quad \cdots ㋑$$

$$\begin{aligned}\partial_{\rho\rho} &= (\cos\varphi)\partial_{x\rho} + (\sin\varphi)\partial_{y\rho} \\ &= (\cos\varphi)\left(\partial_{xx}x_\rho + \partial_{xy}y_\rho + \partial_{xz}z_\rho\right) + (\sin\varphi)\left(\partial_{yx}x_\rho + \partial_{yy}y_\rho + \partial_{yz}z_\rho\right) \\ &= (\cos\varphi)\left\{(\cos\varphi)\partial_{xx} + (\sin\varphi)\partial_{xy}\right\} + (\sin\varphi)\left\{(\cos\varphi)\partial_{xy} + (\sin\varphi)\partial_{yy}\right\} \\ &= (\cos^2\varphi)\partial_{xx} + (\sin^2\varphi)\partial_{yy} + (2\sin\varphi\cos\varphi)\,\partial_{xy} \quad \cdots ㋒\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\varphi\varphi} = &(-\rho\cos\varphi)\partial_x + (-\rho\sin\varphi)\partial_y \\ &+ (-\rho\sin\varphi)\left(\partial_{xx}x_\varphi + \partial_{xy}y_\varphi + \partial_{xz} + z_\varphi\right) \\ &+ (\rho\cos\varphi)\left(\partial_{yx}x_\varphi + \partial_{yy}y_\varphi + \partial_{yz}z_\varphi\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\rho\cos\varphi)\partial_x + (-\rho\sin\varphi)\partial_y \\
&\quad + (-\rho\sin\varphi)\left\{(-\rho\sin\varphi)\partial_{xx} + (\rho\cos\varphi)\partial_{xy}\right\} \\
&\quad + (\rho\cos\varphi)\left\{(-\rho\sin\varphi)\partial_{xy} + (\rho\cos\varphi)\partial_{yy}\right\} \\
&= (\rho^2\sin^2\varphi)\partial_{xx} + (\rho^2\cos^2\varphi)\partial_{yy} + \left(-2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\partial_{xy} \\
&\qquad + (-\rho\cos\varphi)\partial_x + (-\rho\sin\varphi)\partial_y \quad \cdots ⓔ.
\end{aligned}
$$

ゆえに，ⓐ ～ ⓔ を用いて

$$
\begin{aligned}
\partial_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_{\varphi\varphi} + \partial_{zz} &= (\cos^2\varphi)\partial_{xx} + (\sin^2\varphi)\partial_{yy} + (2\sin\varphi\cos\varphi)\,\partial_{xy} \\
&\quad + \left(\frac{1}{\rho}\cos\varphi\right)\partial_x + \left(\frac{1}{\rho}\sin\varphi\right)\partial_y \\
&\quad + (\sin^2\varphi)\partial_{xx} + (\cos^2\varphi)\partial_{yy} + (-2\sin\varphi\cos\varphi)\,\partial_{xy} \\
&\qquad + \left(-\frac{1}{\rho}\cos\varphi\right)\partial_x + \left(-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\right)\partial_y \\
&\quad + \partial_{zz} \\
&= \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} = \Delta.
\end{aligned}
$$

(2) (i) 円柱座標において，$z = r\cos\theta$, $\rho = r\sin\theta$, $\varphi = \varphi \cdots ①$ とおくと，(1) の計算 ⓐ ～ ⓔ をそのまま踏襲すれば

$$
\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} = \partial_{zz} + \partial_{\rho\rho}
$$

i.e.,

$$
\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \boldsymbol{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}} \quad \cdots ⓑ.
$$

変換①のもと $z = r\cos\theta$, $\rho = r\sin\theta$ ゆえ $r_\rho = \sin\theta$. さらに $\dfrac{\rho}{z} = \tan\theta$ であるから，両辺を ρ で偏微分して

$$
\frac{1}{z} = \frac{\theta_\rho}{\cos^2\rho} \iff \theta_\theta = \frac{1}{r}\cos\theta.
$$

よって，Chain rule によって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\rho} &= \frac{\partial}{\partial r}r_\rho + \frac{\partial}{\partial\theta}\theta_\rho \\
&= \boldsymbol{(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}} \quad \cdots ⓒ.
\end{aligned}
$$

(iii) ①の変換のもと，$\rho^2 = r^2\sin^2\theta$ だから，ⓑをⓐへ代入すれば,

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad \cdots ⓓ
$$

したがって，ⓒより $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \left(\dfrac{1}{r^2\tan\theta}\right)\dfrac{\partial}{\partial\theta}$. これをⓓへ代入すれば所望の等式☆を得る.

∎