高階偏導関数，微分の順序交換，テイラーの定理　演習問題１ 解答

問 1． 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

に対して，以下の問に答えよ．

(i) $b \in \mathbb{R}$ とする．$f_x(0,b)$ を求めよ．

（Hint： $b \neq 0$ の場合は $f(x,b)$ に商の微分公式を使ったあと $x=0$ を代入して求めてもよいが，$b=0$ のときには使えない．ここでは偏微分係数の定義

$$f_x(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

にしたがって求めてみよ．）

解答． $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0} &= \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{xb(x^2-b^2)}{x^2+b^2} - 0 \right) = \frac{b(x^2-b^2)}{x^2+b^2} \\ &\to \begin{cases} 0 & (b=0 \text{ のとき}) \\ -b & (b \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases} = -b \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

したがって $f_x(0,b) = -b$. ■

(ii) $f_{xy}(0,0)$ を求めよ．（Hint： ここでも $f_{xy}(0,0)$ の定義にしたがって求めてみよ．）

解答． $y \neq 0$ のとき

$$\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0} = \frac{-y-0}{y} = -1 \to -1 \quad (y \to 0).$$

したがって $f_{xy}(0,0) = (f_x)_y(0,0) = -1$. ■

(iii) (i), (ii) と同様にして，$f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

解答． 詳細は省くが，実際 (i), (ii) と同様にして $f_y(a,0) = a$, $f_{yx}(0,0) = 1$ とわかる． ■

注意． この問題の $f(x,y)$ は $f_{xy} = f_{yx}$ が成立しない例となっている．ただし，f_{xy}（もしくは f_{yx}）が連続（例えば C^2 級関数など）であれば，$f_{xy} = f_{yx}$ が成立する．もっと強く，(a,b) の近くで f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a,b) で連続ならば，$f_{yx}(a,b)$ も存在して，$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成立することが知られている．

問 2． $a,b \in \mathbb{R}$ と C^1 級の関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x,y) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

と定める．$f(x,y) = x^2 + e^y + \sin(x+y)$ のとき，以下の問に答えよ．

(i) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - 2\dfrac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)$ を求めよ．

解答.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \cos(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y + \cos(x+y)$$

より，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &= (2x + \cos(x+y)) - 2(e^y + \cos(x+y)) = 2x - 2e^y - \cos(x+y).\end{aligned}$$

■

(ii) (i) で求めた 2 変数関数を $g(x,y)$ とおく．$\left(3\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right) g(x,y)$ を求めよ．

解答.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 + \sin(x+y), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2e^y + \sin(x+y)$$

より，

$$\begin{aligned}\left(3\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) g(x,y) &= 3\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ &= 3(2 + \sin(x+y)) + (-2e^y + \sin(x+y)) = 6 - 2e^y + 4\sin(x+y).\end{aligned}$$

■

(iii) $3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

解答.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \sin(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y - \sin(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)$$

より，

$$\begin{aligned}3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 3(2 - \sin(x+y)) - 5(-\sin(x+y)) - 2(e^y - \sin(x+y)) \\ &= 6 - 2e^y + 4\sin(x+y).\end{aligned}$$

■

注意. この問題は，$\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ をあたかも文字のように考えて形式的な展開（もしくは因数分解）

$$\begin{aligned}&\left(3\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &\quad = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(3\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(3\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &\quad = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{aligned}$$

が成立する関数 $f(x,y)$ の例を述べている．より一般に，対応する多項式が n 次以下，施す関数が C^n 級関数であれば，上記のような形式的な計算が可能となる．それが可能となる理由の本質は，C^2 級の関数 f に対して，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ が成り立つことである．