§4 接平面　演習問題 3

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★★☆)(**方向微分**)　2 変数関数 $f(x,y)$ は全微分可能とする.

(1)　$\nabla f = (f_x, f_y)$ と書くとき,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$$

が成り立つことを示せ. ここに左辺はベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 方向の f の**方向微分**

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + v_1 h,\, y + v_2 h) - f(x,y)}{h}$$

を表す.

(2)　$\nabla f \neq (0,0)$ ならば $f(x,y)$ の方向微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ のとき最大値 $|\nabla f|$ をとり, $\boldsymbol{v} = -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ のとき最小値 $-|\nabla f|$ をとることを示せ.

$\boxed{2}$ (★★☆)(**等位面の法ベクトル**)　c を定数とし, 曲面 $S : f(x,y,z) = c$ を**等位面**とよぶ. ∇f は等位面 S の法ベクトルであることを示せ.

$\boxed{3}$ (★★☆)(**具体的な等位面の法ベクトルの計算**)　u, v をパラメーターとして表示される曲面

$$S : (x,y,z) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

を考える.

(1)　u, v を消去することにより, 曲面 S 上の任意の点 (x,y,z) は

$$x\sin z - y\cos z = 0$$

をみたすことを確かめよ.

(2)　$f(x,y,z) := x\sin z - y\cos z$ とおく. ∇f と点 $\left(1, 0, \frac{\pi}{3}\right)$ における単位法ベクトルを求めよ.