§4 接平面　演習問題 3　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(方向微分)

2 変数関数 $f(x,y)$ は全微分可能とする．

(1)　$\nabla f = (f_x, f_y)$ と書くとき，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$$

が成り立つことを示せ．ここに左辺はベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 方向の f の**方向微分**

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + v_1 h,\, y + v_2 h) - f(x,y)}{h}$$

を表す．

(2)　$\nabla f \neq (0,0)$ ならば $f(x,y)$ の方向微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ のとき最大値 $|\nabla f|$ をとり，$\boldsymbol{v} = -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ のとき最小値 $-|\nabla f|$ をとることを示せ．

解　(1) $f(x,y)$ の点 (a,b) における $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 方向の方向微分は

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + v_1 h,\, b + v_2 h) - f(a,b)}{h}$$

で与えられる．ここで $f(x,y)$ は全微分可能であるから，点 (a,b) において

$$f(a + v_1 h,\, b + v_2 h) = f(a,b) + f_x(a,b) v_1 h + f_y(a,b) v_2 h + o(h)$$

が成り立つ（$o(h)$ はランダウ記号）[*1]．ゆえに，

$$\frac{f(a + v_1 h,\, b + v_2 h) - f(a,b)}{h} = f_x(a,b) v_1 + f_y(a,b) v_2 + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{=o(1)}$$

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + v_1 h,\, b + v_2 h) - f(a,b)}{h} = f_x(a,b) v_1 + f_y(a,b) v_2.$$

よって (a,b) は任意の点であったから，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} &= f_x v_1 + f_y v_2 \\ &= \nabla f \cdot \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

[*1] ランダウ記号については解説集に掲載予定．

(2)　(1) より，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v} = |\nabla f||\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

と書ける．ただし，θ は ∇f と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．よって，方向微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ は ∇f と $\boldsymbol{v}$ が同じ向き $(\theta = 0)$ のとき最大，反対向き $(\theta = \pi)$ のとき最小になることを踏まえると，

$$\cdot \boldsymbol{v} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \text{のとき} \quad \max \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}} = |\boldsymbol{\nabla f}|.$$

$$\cdot \boldsymbol{v} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \text{のとき} \quad \min \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}} = -|\boldsymbol{\nabla f}|.$$

■

Check ∇f は，曲面 $z = f(x, y)$ の**最も急な勾配の方向**を表している．

$\boxed{2}$ (★★☆)(等位面の法ベクトル)

c を定数とし，曲面 $S : f(x, y, z) = c$ を**等位面**とよぶ．∇f は等位面 S の法ベクトルであることを示せ．

解　等位面 $S : f(x, y, z) = c$ 上の曲線を $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$（$s$ はパラメーター）とすると，$\gamma(s)$ に沿って f の値は常に一定値をとるので，

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x(s), y(s), z(s)) = 0 \quad \cdots ①.$$

一方，連鎖律を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s}(x(s), y(s), z(s)) &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(s)}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(s)}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z(s)}{\partial s} \\
&= \nabla f(x(s), y(s), z(s)) \cdot \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dx(s)}{ds} \right) \\
&= \nabla f(x(s), y(s), z(s)) \cdot \gamma'(s).
\end{aligned}$$

ゆえに，①と合わせて，

$$\nabla f(x(s), y(s), z(s)) \cdot \gamma'(s) = 0$$

であり，$\gamma'(s)$ は等位面 S の接ベクトルであるから，$\nabla f(x(s), y(s), z(s))$ は曲面 S の法ベクトルである．■

3 (★★☆)(具体的な等位面の法ベクトルの計算)

u, v をパラメーターとして表示される曲面

$$S : (x, y, z) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

を考える．

(1) u, v を消去することにより，曲面 S 上の任意の点 (x, y, z) は

$$x\sin z - y\cos z = 0$$

をみたすことを確かめよ．

(2) $f(x, y, z) := x\sin z - y\cos z$ とおく．∇f と点 $\left(1, 0, \frac{\pi}{3}\right)$ における単位法ベクトルを求めよ．

解 (1) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v$ により第3式を第1式，第2式へ代入することで，

$$x = u\cos z \quad \cdots ①, \quad x = u\sin z \quad \cdots ②$$

を得る．したがって，①,②より

$$x\sin z - y\cos z = u\cos z\sin z - u\sin z\cos z = 0$$

となり，確かに主張は成り立つ．

(2) $f(x, y, z) := x\sin z - y\cos z$ とおくと，

$$f_x = \sin z, \quad f_y = -\cos z, \quad f_z = x\cos z + y\sin z$$

であるから，

$$\boldsymbol{\nabla f = (\sin z, -\cos z, x\cos z + y\sin z)}.$$

また，$\nabla f(1, 0, \frac{\pi}{3}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であり，$\boxed{\mathbf{2}}$ の結果より $\nabla f(1, 0, \frac{\pi}{3})$ は曲面 S の点 $(1, 0, \frac{\pi}{3})$ における法線ベクトルに等しいので，ここで求める単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f(1, 0, \frac{\pi}{3})}{|\nabla f(1, 0, \frac{\pi}{3})|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{3}, -1, 1\right)}.$$

∎

Check 曲面 $S : (x, y, z) = (u\cos v, u\sin v, v)\ \ (u, v \in \mathbb{R})$ を常螺旋面 **(Helicoid)** という．