接平面　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

一般に，$f(x,y)$ のグラフ $z=f(x,y)$ の，点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面は，

$$(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$$

を法線ベクトルとし，点 $(a,b,f(a,b))$ を通る平面となる。したがって接平面を求めるには，f の偏微分係数を求めて法線ベクトルを求めればよい。なお，(p,q,r) を法線ベクトルとし点 (a,b,c) を通る平面の方程式は，

$$p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$$

で与えられる。

(1) $z=x^2+y^2,\quad (x,y,z)=(1,1,2)$

$f(x,y)=x^2+y^2$ とおくと，与えられた曲面は f のグラフになる。

$$f_x(x,y)=2x,\ f_y(x,y)=2y$$

であり，接点の (x,y) 座標は $(1,1)$ であるので，法線ベクトルは

$$(f_x(1,1), f_y(1,1), -1)=(2,2,-1)$$

で与えられる。これより，接平面の方程式は

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$$

となる。

注意　接平面の方程式を書き換えて，たとえば

$$2x+2y-z=2,\ z=2x+2y-2$$

などのように表してももちろんよい。

(2) $z=x^2+y^2,\quad (x,y,z)=(1,-1,2)$

f を (1) と同じ関数として，接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(1,-1), f_y(1,-1), -1)=(2,-2,-1)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0$$

(3) $z=x^2+y^2,\quad (x,y,z)=(0,0,0)$

f を (1) と同じ関数として，接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(0,0), f_y(0,0), -1)=(0,0,-1)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$0(x-0)+0(y-0)-(z-0)=0$$

すなわち

$$z=0$$

(4) $z = xy, \quad (x, y, z) = (1, 1, 1)$

$f(x, y) = xy$ とおくと，

$$f_x(x, y) = y,\ f_y(x, y) = x$$

これより接点 $(1, 1, 1)$ における接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(1, 1), f_y(1, 1), -1) = (1, 1, -1)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$(x - 1) + (y - 1) - (z - 1) = 0$$

(5) $z = xy, \quad (x, y, z) = (-2, 3, -6)$

f を (4) と同じ関数として，接点 (-2,3,-6) における接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(-2, 3), f_y(-2, 3), -1) = (3, -2, -1)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$3(x + 2) - 2(y - 3) - (z + 6) = 0$$

(6) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x, y, z) = (0, 0, 1)$

この曲面は原点を中心とする半径 1 の球面である。2 変数関数のグラフとして扱いたいので，この方程式を z について解く。

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

複合 $\pm$ の一方を選ばなくてはならないが，考える接点が $(0, 0, 1)$ で z 座標が正になっているので，$\pm$ は $+$ を採用して，

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

のグラフと考えることにする（この関数のグラフは球面の北半球を表している）。

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

より，接点 $(0, 0, 1)$ における接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(0, 0), f_y(0, 0), -1) = (0, 0, -1)$$

で与えられ，したがって求める接平面の方程式は

$$0x + 0y - (z - 1) = 0$$

すなわち

$$z = 1$$

となる。

(7) $x^2+y^2+z^2=1, \quad (x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(6) と同じ曲面で，接点も北半球にある（接点の z 座標が正である）ので，(6) と同じ f を採用すればよい。したがって接点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ における接平面の法線ベクトルは

$$\left(f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),-1\right)=\left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}},-\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}},-1\right)=(-\sqrt{3},-\sqrt{2},-1)$$

で与えられる。これの (-1) 倍をあらためて法線ベクトルに採用すると，接平面の方程式は

$$\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(z-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=0$$

(8) $x^2+y^2+z^2=1, \quad (x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(6) と同じ曲面で，接点は今度は南半球にあるので，f として

$$f(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

を採用する。このとき

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

となるので，接点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ における接平面の法線ベクトルは

$$\left(f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),-1\right)=\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}},\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}},-1\right)=(\sqrt{3},\sqrt{2},-1)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(z+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=0$$

(9) $z=\sin(xy), \quad (x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$

$f(x,y)=\sin(xy)$ とおくと，

$$f_x(x,y)=y\cos(xy),\ f_y(x,y)=x\cos(xy)$$

これより接点 $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ における接平面の法線ベクトルは

$$\left(f_x\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right),f_y\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right),-1\right)=\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6},-1\right)=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{4},-1\right)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

(10) $z = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 + 4y^3 + 2x - 3, \quad (x, y, z) = (1, -1, 3)$
$f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 + 4y^3 + 2x - 3$ とおくと，

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2 + 2,\ f_y(x, y) = -2x^2 + 10xy + 12y^2$$

これより接点 $(1, -1, 3)$ における接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(1, -1), f_y(1, -1), -1) = (14, 0, -1)$$

で与えられる。接平面の方程式は

$$14(x - 1) + 0(y + 1) - (z - 3) = 0$$

すなわち

$$14(x - 1) - (z - 3) = 0$$