§3 全微分と合成関数の微分法　演習問題 3

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(**chain rule ①**) a, b を定数として，2 変数関数 $f(x, y)$ と $x = au + bv,\ y = -bu + av$ の合成関数 $z = f(au + bv,\ -bu + av)$ を考える．

(1) $z_u,\ z_v$ を $z_x,\ z_y$ で表せ.

(2) $z_u^2 + z_v^2$ を $z_x,\ z_y$ で表せ.

2 (★☆☆)(**chain rule ②**) 極座標表示 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考える.

(1) x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $z = z(x, y)$ が $xz_x + yz_y = 0$ を満たすならば，z は角度 θ のみの関数であることを示せ.

(2) x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $z = z(x, y)$ が $xz_y - yz_x = 0$ を満たすならば，z は動径 r のみの関数であることを示せ.

3 (★★☆)(**chain rule ③：左辺からの変形**) x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ との合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える．このとき以下を示せ：

(1) $r_x = \cos\theta,\quad r_y = \sin\theta,\quad \theta_x = -\dfrac{1}{r}\sin\theta,\quad \theta_y = \dfrac{1}{r}\cos\theta.$

(2) $(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \dfrac{1}{r^2}(z_\theta)^2$.（左辺から変形して右辺を導け.）

4 (★☆☆)(**chain rule ④：右辺からの変形**) x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ との合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える．このとき以下を示せ：

(1) $x_r = \cos\theta,\quad x_y = \sin\theta,\quad x_\theta = -r\sin\theta,\quad y_\theta = r\cos\theta.$

(2) $(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \dfrac{1}{r^2}(z_\theta)^2$.（右辺から変形して左辺を導け.）

5 (★★☆)(**chain rule ⑤**) $f(x, y)$ は C^2 級として，$z = f(x, y)$，$x = e^u\cos v$，$y = e^u\sin v$ とする．このとき，

$$z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv})$$

が成り立つことを示せ.