§3 全微分と合成関数の微分法　演習問題 3　解答

📎 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(chain rule ①)

a, b を定数として，2 変数関数 $f(x, y)$ と $x = au + bv,\ y = -bu + av$ の合成関数 $z = f(au + bv,\ -bu + av)$ を考える．

(1) $z_u,\ z_v$ を $z_x,\ z_y$ で表せ．

(2) $z_u^2 + z_v^2$ を $z_x,\ z_y$ で表せ．

解 $x = au + bv,\ y = -bu + av$ に対し，$x_u = a,\ x_v = b$，$y_u = -b,\ y_v = a$ である．

(1) Chain rule により，

$$\boldsymbol{z_u} = z_x x_u + z_y y_u = \boldsymbol{a z_x - b z_y},$$
$$\boldsymbol{z_v} = z_x x_v + z_y y_v = \boldsymbol{b z_x + a z_y}.$$

(2) (1) より

$$\boldsymbol{z_u^2 + z_v^2} = (a z_x - b z_y)^2 + (b z_x + a z_y)^2 = \boldsymbol{(a^2 + b^2)(z_x^2 + z_y^2)}.$$

∎

2 (★☆☆)(chain rule ②)

極座標表示 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考える．

(1) x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $z = z(x, y)$ が $x z_x + y z_y = 0$ を満たすならば，z は角度 θ のみの関数であることを示せ．

(2) x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $z = z(x, y)$ が $x z_y - y z_x = 0$ を満たすならば，z は動径 r のみの関数であることを示せ．

解 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ に対し，$x_r = \cos\theta,\ x_\theta = -r\sin\theta,\ y_r = \sin\theta,\ y_\theta = r\cos\theta$ である．

(1) Chain rule より，

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r = \cos\theta \cdot z_x + \sin\theta \cdot z_y \qquad \cdots ①.$$

一方，仮定より $0 = x z_x + y z_y = r(\cos\theta \cdot z_x + \sin\theta \cdot z_y)$ であるから，これを①に代入すると $z_r = 0$ を得る．したがって，z は角度 θ のみの関数である．

(2) Chain rule より，

$$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -r\sin\theta\cdot z_x + r\cos\theta\cdot z_y \quad \cdots ②.$$

一方，仮定より $0 = xz_y - yz_x = r(\cos\theta\cdot z_y - \sin\theta\cdot z_x)$ であるから，これを②に代入すると $z_\theta = 0$ を得る．したがって，z は動径 r のみの関数である．

■

3 (★★☆)(chain rule ③：左辺からの変形)

x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ との合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える．このとき以下を示せ：

(1) $r_x = \cos\theta$, $\quad r_y = \sin\theta$, $\quad \theta_x = -\dfrac{1}{r}\sin\theta$, $\quad \theta_y = \dfrac{1}{r}\cos\theta$.

(2) $(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \dfrac{1}{r^2}(z_\theta)^2$.（左辺から変形して右辺を導け.）

解 (1) $r^2 = x^2 + y^2 \cdots ①$ の両辺を x で偏微分して，$2rr_x = 2x$，したがって，$r_x = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$.
同様に，①の両辺を y で偏微分して，$2rr_y = 2y$，したがって，$r_y = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$.
一方，$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \cdots ②$ であるから，②の両辺を x で偏微分して，$\dfrac{\theta_x}{\cos^2\theta} = -\dfrac{y}{x^2}$．ゆえに，$\theta_x = -\dfrac{y}{x^2}\cos^2\theta = -\dfrac{1}{r}\sin\theta$．同様に，②の両辺を y で偏微分して，$\dfrac{\theta_y}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{x}$．ゆえに，$\theta_y = \dfrac{1}{x}\cos^2\theta = \dfrac{1}{r}\cos\theta$.

(2) Chain rule により (1) の結果を用いると，

$$z_x = z_r r_x + z_\theta\theta_x = \cos\theta\cdot z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\cdot z_\theta \cdots ①$$
$$z_y = z_r r_y + z_\theta\theta_y = \sin\theta\cdot z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cdot z_\theta \cdots ②$$

したがって，①,②より，

$$\begin{aligned}(z_x)^2 + (z_y)^2 &= \left(\cos\theta\cdot z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\cdot z_\theta\right)^2 + \left(\sin\theta\cdot z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cdot z_\theta\right)^2 \\ &= (z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2\end{aligned}$$

となり，証明された．

■

$\boxed{4}$ (★☆☆)(chain rule ④：右辺からの変形)

x, y について偏微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ との合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える．このとき以下を示せ：

(1) $x_r = \cos\theta$, $\quad y_r = \sin\theta$, $\quad x_\theta = -r\sin\theta$, $\quad y_\theta = r\cos\theta$.

(2) $(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \dfrac{1}{r^2}(z_\theta)^2$.（右辺から変形して左辺を導け.）

解 (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より，$x_r = \cos\theta$, $\quad y_r = \sin\theta$, $\quad x_\theta = -r\sin\theta$, $\quad y_\theta = r\cos\theta$ はすぐにわかる.

(2) Chain rule により (1) の結果を用いると，

$$
\begin{aligned}
z_r &= z_x x_r + z_y y_r = \cos\theta \cdot z_x + \sin\theta \cdot z_y \\
z_\theta &= z_x x_\theta + z_y y_\theta = -r\sin\theta \cdot z_x + r\cos\theta \cdot z_y
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
(z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2 &= (\cos\theta \cdot z_x + \sin\theta \cdot z_y)^2 + (-\sin\theta \cdot z_x + \cos\theta \cdot z_y)^2 \\
&= (z_x)^2 + (z_y)^2
\end{aligned}
$$

となり証明が完了した. ∎

Check $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を見比べてみて，単に計算の手間を考えるならば $\boxed{4}$ のように，右辺から左辺を導く形で証明する方が早く，問題としてのレベルも簡単になる．しかし，直交座標で見た場合の $(z_x)^2 + (z_y)^2$ が，極座標で見た場合どうなるか，という思考の流れで捉える方が自然であり，右辺がどうなるか分からない段階で計算を始めることが多いことを踏まえると，左辺から右辺を導く形の方が変形の手順としてはより自然である.

$\boxed{5}$ (★★☆)(chain rule ⑤)

$f(x, y)$ は C^2 級として，$z = f(x, y)$，$x = e^u\cos v$，$y = e^u\sin v$ とする．このとき，

$$
z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv})
$$

が成り立つことを示せ.

解 計算の簡便のため，右辺から左辺を導く．証明に必要とする細々な計算を先に済ませておこう．まず，$x = e^u\cos v$，$y = e^u\sin v$ に対して，

$$
x_u = e^u\cos v, \quad x_v = -e^u\sin v, \quad y_u = e^u\sin v, \quad y_v = e^u\cos v
$$

$$
\begin{aligned}
&x_{uu} = e^u \cos v, \quad x_{uv} = -e^u \sin v = x_{vu}, \quad x_{vv} = -e^u \cos v \qquad (\star)\\
&y_{uu} = e^u \sin v, \quad y_{uv} = e^u \cos v = y_{vu}, \quad y_{vv} = -e^u \sin v.
\end{aligned}
$$

したがって，Chain rule より

$$
\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u, \quad z_v = z_x x_v + z_y y_v\\
(z_x)_u &= z_{xx} x_u + z_{xy} y_u, \quad (z_x)_v = z_{xx} x_v + z_{xy} y_v\\
(z_y)_u &= z_{yx} x_u + z_{yy} y_u, \quad (z_y)_v = z_{yx} x_v + z_{yy} y_v
\end{aligned}
$$

となる．f が C^2 級だから $z_{xy} = z_{yx}$ となることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
z_{uu} &= (z_x x_u + z_y y_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x x_{uu} + (z_y)_u y_u + z_y y_{uu}\\
&= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u)\, x_u + z_x x_{uu} + (z_{xy} x_u + z_{yy} y_u)\, y_u + z_y y_{uu}\\
&= (x_u)^2 z_{xx} + (y_u)^2 z_{yy} + 2 x_u y_u z_{xy} + z_x x_{uu} + z_y y_{uu} \quad \cdots ①.
\end{aligned}
$$

同様に計算すると，

$$
z_{vv} = (x_v)^2 z_{xx} + (y_v)^2 z_{yy} + 2 x_v y_v z_{xy} + z_x x_{vv} + z_y y_{vv} \quad \cdots ②.
$$

ここで，① + ② で現れる z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_x, z_y の係数について $(\star)$ より計算しておくと，

$$
\begin{aligned}
(x_u)^2 + (x_v)^2 &= e^{2u} = (y_u)^2 + (y_v)^2\\
x_u y_u + x_v y_v &= 0\\
x_{uu} + x_{vv} &= 0 = y_{uu} + y_{vv}
\end{aligned}
$$

であるから，① + ② より，

$$
\begin{aligned}
z_{uu} + z_{vv} &= \underbrace{\left[(x_u)^2 + (x_v)^2\right]}_{=e^{2u}} z_{xx} + \underbrace{\left[(y_u)^2 + (y_v)^2\right]}_{=e^{2u}} z_{yy}\\
&\quad + 2\underbrace{\left[x_u y_u + x_v y_v\right]}_{=0} z_{xy}\\
&\quad + \underbrace{\left[x_{uu} + x_{vv}\right]}_{=0} z_x + \underbrace{\left[y_{uu} + y_{vv}\right]}_{=0} z_y\\
&= e^{2u}\,(z_{xx} + z_{yy})\\
\iff \ & e^{-2u}\,(z_{uu} + z_{vv}) = z_{xx} + z_{yy}
\end{aligned}
$$

となり．証明された． ■

【別解】　ここでは**左辺から右辺を導く**．$x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ より $e^{2u} = x^2 + y^2 \cdots ①$ の両辺を x で偏微分して，$2u_x e^{2u} = 2x$，したがって，$u_x = \dfrac{x}{e^{2u}} = \dfrac{1}{e^u}\cos v$．同様に，①の両辺を y で偏微分して，$2u_y e^u = 2y$，したがって，$u_y = \dfrac{y}{e^{2u}} = \dfrac{1}{e^u}\sin v$.

一方，$\tan v = \dfrac{y}{x} \cdots$ ② であるから，②の両辺を x で偏微分して，$\dfrac{v_x}{\cos^2 v} = -\dfrac{y}{x^2}$．ゆえに，$v_x = -\dfrac{y}{x^2}\cos^2 v = -\dfrac{1}{e^u}\sin v$．同様に，②の両辺を y で偏微分して，$\dfrac{v_y}{\cos^2 v} = \dfrac{1}{x}$．ゆえに，$v_y = \dfrac{1}{x}\cos^2 v = \dfrac{1}{e^u}\cos v$.

ここまで計算をまとめると，

$$u_x = e^{-u}\cos v, \quad u_y = e^{-u}\sin v, \quad v_x = -e^{-u}\sin v, \quad v_y = e^{-u}\cos v. \quad ③$$

また，③より

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= -e^{-u}u_x\cos v + e^{-u}(-\sin v)\cdot v_x = e^{-2u}\left(\sin^2 v - \cos^2 v\right)\\
u_{xy} &= -e^{-u}u_y\cos v + e^{-u}(-\sin v)\cdot v_y = -2e^{-2u}\sin v\cos v = u_{yx}\\
u_{yy} &= -e^{-u}u_y\sin v + e^{-u}\cos v\cdot v_y = e^{-2u}\left(\cos^2 v - \sin^2 v\right)\\
v_{xx} &= e^{-u}u_x\sin v - e^{-u}\cos v\cdot v_x = 2e^{-2u}\sin v\cos v\\
v_{xy} &= e^{-u}u_y\sin v - e^{-u}\cos v\cdot v_y = e^{-2u}\left(\sin^2 v - \cos^2 v\right) = v_{yx}\\
v_{yy} &= -e^{-u}u_y\cos v + e^{-u}(-\sin v)\cdot v_y = -2e^{-2u}\sin v\cos v
\end{aligned}$$

と求まる．したがって，Chain rule より

$$\begin{aligned}
z_x &= z_u u_x + z_v v_x, \quad z_y = z_u u_y + z_v v_y\\
(z_u)_x &= z_{uu}u_x + z_{uv}v_x, \quad (z_u)_y = z_{uu}u_y + z_{uv}v_y\\
(z_v)_x &= z_{vu}u_x + z_{vv}v_x, \quad (z_v)_y = z_{vu}u_y + z_{vv}v_y
\end{aligned}$$

となる．f が C^2 級だから $z_{uv} = z_{vu}$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= \left(z_u u_x + z_v v_x\right)_x = (z_u)_x u_x + z_u u_{xx} + (z_v)_x v_x + z_v v_{xx}\\
&= \left(z_{uu}u_x + z_{uv}v_x\right)u_x + z_u u_{xx} + \left(z_{vu}u_x + z_{vv}v_x\right)v_x + z_v v_{xx}\\
&= (u_x)^2 z_{uu} + (v_x)^2 z_{vv} + 2u_x v_x z_{uv} + u_{xx}z_u + v_{xx}z_v \quad \cdots ④.
\end{aligned}$$

同様に計算すると，

$$z_{yy} = (u_y)^2 z_{uu} + (v_y)^2 z_{vv} + 2u_y v_y z_{uv} + u_{yy}z_u + v_{yy}z_v \quad \cdots ⑤.$$

ここで，④ + ⑤ で現れる z_{uu}, z_{vv}, z_{uv}, z_u, z_v の係数について計算しておくと，

$$\begin{aligned}
(u_x)^2 + (u_y)^2 &= e^{-2u} = (v_x)^2 + (v_y)^2\\
u_x v_x + u_y v_v &= 0\\
u_{xx} + u_{vv} &= 0 = v_{xx} + v_{yy}
\end{aligned}$$

であるから，④ + ⑤ より，

$$z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv})$$

となり，所望の等式が得られる．