全微分と合成関数の微分法　演習問題２　解答

問 1. 次の極限が存在するかどうか調べ，もし存在するならばその値を求めよ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

（Hint: x 軸に沿って (x,y) を $(0,0)$ へ近づけた場合と直線 $y=x$ に沿って (x,y) を $(0,0)$ へ近づけた場合とを比較してみよ．）

解答. $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ とおく．$x\to 0$ のとき，$(x,0)\to(0,0)$ であり，$f(x,0)=0\to 0$. 一方，$x\to 0$ のとき，$(x,x)\to(0,0)$ であり，$f(x,x)=1/2\to 1/2$. よって (x,y) の $(0,0)$ への近づけ方によって $f(x,y)$ は異なる値へ近づくので $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない． ■

問 2. 関数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ のとき}) \end{cases}.$$

について，以下の問に答えよ．

(i) 関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ において連続であるかどうか調べよ．ただし，必要ならば**問** 1 の結果を用いてもよい．

解答. **問** 1 の結果より，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．したがって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$$

が成り立たないから $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない． ■

(ii) 関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ で偏微分可能かどうか調べよ．
（Hint: “偏微分可能” であることの定義を確認してみよ．）

解答. $x\neq 0$ のとき

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{0-0}{x}=0\to 0 \quad (x\to 0).$$

したがって $f(x,y)$ は $(0,0)$ において x に関して偏微分可能で $f_x(0,0)=0$ だとわかる．同様にして $y\neq 0$ のとき

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\frac{0-0}{y}=0\to 0 \quad (y\to 0).$$

したがって $f(x,y)$ は $(0,0)$ において y に関して偏微分可能で $f_y(0,0)=0$ とわかる． ■

注意. **問** 2 の $f(x,y)$ は，$(0,0)$ において偏微分可能であるが連続ではない例になっている．$(0,0)$ で全微分可能であれば $(0,0)$ で連続でもあるはずなので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではないが，$(0,0)$ で偏微分可能である例でもある．

問 3. 2 変数関数 $z=x^2-y$ と 1 変数関数 $x=e^t$, $y=t$ について以下の問に答えよ．これらの関数の（全）微分可能性は認めてよい．

(i) 上記関数を合成して，z を t の関数として表せ．

解答． $z=(e^t)^2-t=e^{2t}-t.$ ■

(ii) (i) の結果を直接微分して，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

解答．

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{2t}-t)=2e^{2t}-1.$$

■

(iii) 合成関数の微分[*1]を用いて，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

解答．

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1,\quad \frac{dx}{dt}=e^t,\quad \frac{dy}{dt}=1$$

であるから，合成関数の微分より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}(e^t,t)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial z}{\partial y}(e^t,t)\frac{dy}{dt}(t)\\&=(2e^t)\cdot e^t+(-1)\cdot 1=2e^{2t}-1.\end{aligned}$$

■

注意． (i) 授業で紹介した $z=f(x,y)$ に $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ を合成して得られた合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ の微分

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{0.1}$$

において，各項の意味を正確に理解すること．授業で紹介したように，等式 (0.1) の正確な意味は

$$\frac{dz}{dt}=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t),$$

もしくは $f_x(x,y)$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ 等を用いて表した

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial z}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

である．すなわち等式 (0.1) の

- 左辺の $\dfrac{dz}{dt}$ は $z=f(x,y)$ に $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ を合成して z を t の関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ としてみたときの t に関する導関数,
- 右辺の $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は，$z=f(x,y)$ を一旦 x で偏微分した偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ に $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ を合成して得られる t についての関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))$,
- $\dfrac{dx}{dt}$ は $x=\varphi(t)$ の導関数 $\dfrac{dx}{dt}(t)$,

である．同様に

[*1] ここでの “合成関数の微分” とは，z の偏導関数と x, y の導関数を用いることを指す．

- 右辺の $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ は，$z = f(x, y)$ を一旦 y で偏微分した偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ に $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を合成して得られる t についての関数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))$,
- $\dfrac{dy}{dt}$ は $y = \psi(t)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dt}(t)$,

である.

(ii) **問** 3 のように $z = f(x, y)$ や $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ が具体的に与えられている場合は，合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ の t に関する微分は，合成関数の微分法を用いなくても実際に合成したものを直接微分して容易に求めることができる場合も多い（検算できる場合も多い）.