全微分と合成関数の微分法　問題１　解答

[1] 次の関数 z の t による導関数 $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ. ただし, h, k は定数とする.

$z = f(ht, kt), \quad f(x, y) = xy - x + y + 1$

[解]: $z = f(x, y)$ の偏導関数を求めると,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 1.$$

$x = ht, y = kt$ であるから, 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (kt-1)h + (ht+1)k \\ &= 2hkt - h + k.\end{aligned}$$

[2] 次の関数 z の u, v による偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

$z = f(u+v, uv), \quad f(x, y) = \sin(x+y)$

[解]: $z = f(x, y)$ の偏導関数を求めると,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x+y).$$

また, z は $f(x, y)$ と $x = u + v, y = uv$ の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (v+1)\cos(uv+u+v), \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (u+1)\cos(uv+u+v).\end{aligned}$$

[3] 次の関数 z の r, θ による偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

$z = f(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

[解]: $z = f(x, y)$ の偏導関数を求めると,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

また, z は $f(x, y)$ と $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{2}{\sin 2\theta + 1}.\end{aligned}$$