

§2 偏微分の定義と基本性質 演習問題1 解答

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(偏微分の定義)

次の空欄に適切な数式を入れよ.

$f(x, y)$ を2変数関数とする. $f(x, y)$ が点 (a, b) で x に関して偏微分可能であるとは, 極限值

(あ)

が存在するときをいい, 記号で (い) または $f_x(a, b)$ と書く.

同様に, $f(x, y)$ が点 (a, b) で y に関して偏微分可能であるとは, 極限值

(う)

が存在するときをいい, 記号で (え) または $f_y(a, b)$ と書く.

解 順に以下のようになる:

(あ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$

(い) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

(う) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$

(え) $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

2 (☆☆☆)(偏微分の具体的計算)

次の関数を x, y それぞれの場合について偏微分せよ.

(1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

(2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $z = e^{ax} \sin(by)$

(4) $z = \log(x^2 + y^2) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$

(5) $z = x^y \quad (x > 0)$

(6) $z = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

解 実際に計算する際は, 偏微分する変数以外の変数は定数とみなす.

(1) $z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$

(2) $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$(3) \quad z_x = ae^{ax} \sin(by), \quad z_y = be^{ax} \cos(by)$$

$$(4) \quad z_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$(5) \quad z = x^y \text{ の両辺自然対数をとって,}$$

$$\log z = y \log x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺を x で偏微分して,

$$\frac{z_x}{z} = y \cdot \frac{1}{x} \quad \therefore z_x = \frac{y}{x} z = yx^{y-1}$$

今度は①の両辺を y で偏微分して,

$$\frac{z_y}{z} = \log x \quad \therefore z_y = z \log x = x^y \log x$$

$$(6) \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ において}$$

$$z_x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)_x}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z_y = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)_y}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

3 (★★☆)(偏微分可能 $\Rightarrow$ 連続?)

2変数関数 $f(x, y)$ を次で定める:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \cdots (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \cdots (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) f は原点で x についても y についても偏微分可能であって, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$ であることを示せ.

(2) f は原点で連続でないことを示せ.

解 (1) f は x と y について対称なので, x についての主張のみを示せば十分. このとき,

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} = 0$$

だから, 極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$ は存在する. したがって, f は $x = 0$ で偏微分可能であって

$$f_x(0, 0) = 0.$$

(2) $f(x, y)$ の定義域内の点 (x, y) が直線 $y = x$ に沿って原点に近づくとなると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}.$$

よって, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ となり得ない. ゆえに, f は原点で連続でない. ■

Check

1 変数関数の場合は「微分可能 $\Rightarrow$ 連続」であったが, 2 変数の場合はこの例が示すように一般には「偏微分可能 $\Rightarrow$ 連続」とならない. 偏微分より強い条件である全微分可能ならば連続になる. 詳細は 微積分 II 演習問題「§3 全微分と合成関数の微分法 演習問題 1, 2」を参照のこと.

4 (★★☆)(平均値の定理の応用)

2 変数関数 $f(x, y)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f_x(x, y) = 0$ および $f_y(x, y) = 0$ ならば $f(x, y)$ は定数であることを示せ.

(2) $f_x(x, y) = \sin x$, $f_y(x, y) = \cos y$ であるとき, $f(x, y)$ を求めよ.

解 (1) まず y を固定して x の関数とみる. 平均値の定理より,

$$f(x, y) - f(0, y) = x f_x(c, y)$$

となる実数 c が 0 と x の間に存在する. 条件 $f_x(x, y) = 0$ より, 特に $f_x(x, y)|_{x=c} = 0$ だから,

$$f(x, y) = f(0, y), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

となり, $f(x, y)$ は x によらない y の関数である. ゆえに $f(x, y) = g(y)$ とおける. $f_y(x, y) = g'(y)$ であり $f_y(x, y) = 0$ より $g'(y) = 0$. したがって, $g(y)$ は定数. 以上まとめて, $f(x, y)$ は定数である.

(2) まず $f_x(x, y) = \sin x$ より

$$f(x, y) = \int \sin x \, dx = -\cos x + g(y)$$

と書ける. ただし, $g(y)$ は y のみの関数. 両辺を y で偏微分して

$$\cos y = f_y(x, y) = g'(y)$$

ゆえに, 両辺を y で積分して

$$g(y) = \int \cos y \, dy = \sin y + c \quad (c: \text{任意定数}).$$

したがって, $f(x, y) = -\cos x + \sin y + c$. ■