§13 重積分の応用（体積編） 演習問題 1

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★☆☆)(**球の体積①**)

半径 a の球の体積を求めよ．

2 (★★☆)(**立体の体積①**)

次の図形 F の体積を求めよ．ただし，a, b, c は正の定数とする．

(1) 平面 $ax + by + cz = 1$，$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ で囲まれた図形 F.

(2) $F = \{(x, y, z) : 0 \leqq 3x + y \leqq 1,\ 0 \leqq y + 2z \leqq 1,\ 0 \leqq 2z + 3x \leqq 1\}$.

(3) $F = \left\{(x, y, z) : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 \leqq 1\right\}$.

(4) $F = \left\{(x, y, z) : x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \leqq a^{2/3}\right\}$.

3 (★☆☆)(**立体の体積②**)

球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ の共通部分 E の体積を求めよ．

4 (★☆☆)(**立体の体積③**)

直交 2 円柱 $x^2 + y^2 \leqq a^2,\ y^2 + z^2 \leqq a^2$ の共通部分 D の体積を求めよ．

5 (★★☆)(**立体の体積④**)

次の各曲面で囲まれた立体の体積を求めよ．

(1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (a > 0)$ で囲まれた円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ の内部 D.

(2) 放物面 $x^2 + y^2 = z$ と柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ で囲まれた部分 E.

(3) 曲面 $z^2 = 4ax\ (a > 0)$ と柱面 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれた部分 F.

$\boxed{6}$ (★★☆)(**回転トーラスの体積**)

次の 3 次元空間内の立体 $\mathbf{T}$ の体積を求めよ．

$$\mathbf{T} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 + z^2 \leqq 1 \right\}.$$

$\boxed{7}$ (★★☆)(**囲まれた部分の立体の体積①**)

$z = 5x^2 + xy - y^2 - 3$ と $z = -3x^2 + xy - 3y^2 + 5$ とで囲まれた立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{8}$ (★★☆)(**囲まれた部分の立体の体積②**)

$f(x)$ を正値連続関数，$B_R := \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ とし，$0 \leqq t \leqq 1$ とする．このとき，次の領域 Ω_t の体積 $V(\Omega_t)$ は t の値によらず一定であることを示せ：

$$\Omega_t := \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in B_R,\ 0 \leqq z \leqq \frac{tf(x) + (1-t)f(y)}{f(x) + f(y)} \right\}.$$