§13　重積分の応用（曲面積編）　演習問題 2　解答

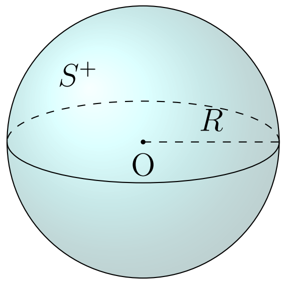
問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(球面の曲面積)

半径 R の球面 S の曲面積を求めよ．

解 半径 R の球面 S をその中心が xyz-空間の原点に一致するように，座標をとる．
対称性より，$z \geqq 0$ の部分 $S^+ = S \cap \{z \geqq 0\}$ の曲面積を 2 倍すればよい．
このとき $S^+ : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geqq 0$ より

$$S : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqq R^2.$$



よって $z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$，$z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ であるから，

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

ゆえに，球面 S の曲面積 $A(S)$ は

$$A(S) = 2A(S^+) = 2\iint_{\{x^2+y^2 \leqq R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy \quad \cdots ①.$$

ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考えると Jacobian は r であったから，①より

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}r\,drd\theta \\ &= 2R\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}dr\right) \\ &= 4\pi R\Big[-\sqrt{R^2 - r^2}\Big]_{r=0}^{R} = \boldsymbol{4\pi R^2}. \end{aligned}$$

■

2 (★★☆)(抽象的曲面の曲面積)

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(R > 0)$ が円柱 $x^2 + y^2 \leqq Rx$ によって切り取られる部分 S の曲面積を求めよ．

解 円柱 $x^2 + y^2 \leqq Rx$ は z 方向に無関係であるから，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ がこの円柱によって切り取られる部分 S は xy-平面に関して対称．したがって，S の $z \geqq 0$ の部分 S^+ の曲面積を 2 倍すればよい．ここで，

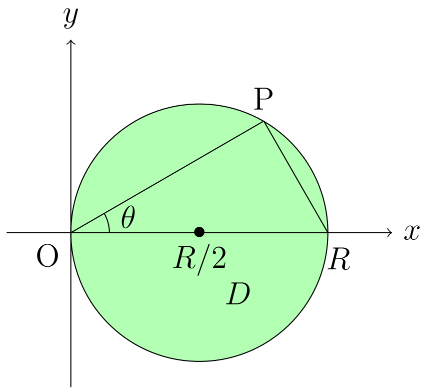
$$S^+ = \left\{z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} : x^2 + y^2 \leqq Rx\right\}$$

$$= \left\{ z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \ : \ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

であり，$\boxed{1}$ と同様に $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ であるから，S の曲面積 $A(S)$ は

$$A(S) = 2A(S^+) = 2 \iint_{\{(x-\frac{R}{2})^2 + y^2 \leqq (\frac{R}{2})^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy \quad \cdots ①.$$

重積分①の積分領域を $D = \left\{ (x, y) \ : \ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$ とおく．D の境界円 $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$ 上の任意の点 P を，極座標において P $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表すと，右図より，$r = \overline{\mathrm{OP}} = R\cos\theta$ と表されるから，D は極座標において



$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leqq r \leqq R\cos\theta, \ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

と表される．

よって，①より

$$\begin{aligned}
A(S) &= 2 \iint_{D'} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} r \, drd\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\theta} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} r \, drd\theta \\
&= 2R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\sqrt{R^2 - r^2} \Big]_{r=0}^{R\cos\theta} d\theta \\
&= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{1 - \cos^2\theta} + 1 \right) d\theta \\
&= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin\theta + 1) \, d\theta \qquad (\because \ -\sqrt{1 - \cos^2\theta} = |\sin\theta| \ : \text{偶関数}) \\
&= 4R^2 \Big[\cos\theta + \theta \Big]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}.
\end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (★★☆)(回転面の曲面積)

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で C^1 級関数で，$f(x) > 0$ とする．xyz-空間の中で曲線 $y = f(x)$ を x 軸のまわりに回転して得られる曲面 S の曲面積 $A(S)$ は

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

で与えられることを示せ．

解 回転面 S は $S : y^2 + z^2 = f(x)^2$ と表される．S の $z \geqq 0$ の部分を考えると，

$$z = \sqrt{f(x)^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D,$$

ただし，$D := \{(x, y) : a \leqq x \leqq b,\ |y| \leqq f(x)\}$．このとき，

$$z_x = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}$$

であるから，

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{f(x)^2 f'(x)^2}{f(x)^2 - y^2} + \frac{y^2}{f(x)^2 - y^2}} = f(x)\sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{f(x)^2 - y^2}}.$$

ゆえに，曲面 S の曲面積は $z \geqq 0$ の部分の曲面積を 2 倍して，

$$\begin{aligned}
A(s) = 2\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy &= 2\int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} f(x)\sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{f(x)^2 - y^2}}\, dydx \\
&= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}\, dx \\
&= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \left[\arcsin \frac{y}{f(x)}\right]_{y=-f(x)}^{f(x)} dx \\
&= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} dx \\
&= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.
\end{aligned}$$

■

4 (★★☆)(カテナリーの回転面の曲面積)

$a > 0$ とする．カテナリー $y = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ $(-a \leqq x \leqq a)$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面 S の曲面積を求めよ．

解 $\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right) := \dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$，$\sinh\left(\dfrac{x}{a}\right) := \dfrac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ とおくと，求める曲面 S の曲面積 $A(S)$ は，**3** の結果を用いて，

$$\begin{aligned}
A(S) = 2\pi \int_{-a}^{a} a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx &= 2\pi a \int_{-a}^{a} \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) dx \\
&= 2\pi a \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{2x}{a}\right) + 1\right) dx \\
&= \pi a \left[\frac{a}{2}\sinh\left(\frac{2x}{a}\right) + x\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{\pi}{2}a^2 \left\{\frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{e^2 - e^{-2}}{2} + 4\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}a^2(e^2 - e^{-2} + 4)}.
\end{aligned}$$

■