§13 重積分の応用（体積編） 演習問題 1 解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★☆☆)(球の体積①)

半径 a の球の体積を求めよ．

解 半径 a の球 B_a は $B_a = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\}$ と表される．よって，空間の極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
$$(0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \pi \leqq \theta,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

を用いると，Jacobian は $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2|\sin\theta|$ だから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B_a) = \iiint_{B_a} dxdydz &= \iiint_{\{0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\pi\leqq\theta,\ 0\leqq\varphi<2\pi\}} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| drd\theta d\varphi \\
&= \iiint_{\{0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\pi\leqq\theta,\ 0\leqq\varphi<2\pi\}} r^2|\sin\theta|\, drd\theta d\varphi \\
&= \left(\int_0^a r^2\, dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^a [-\cos\theta]_{\theta=0}^\pi \cdot 2\pi = \boldsymbol{\frac{4\pi a^3}{3}}.
\end{aligned}$$

∎

2 (★★☆)(立体の体積①)

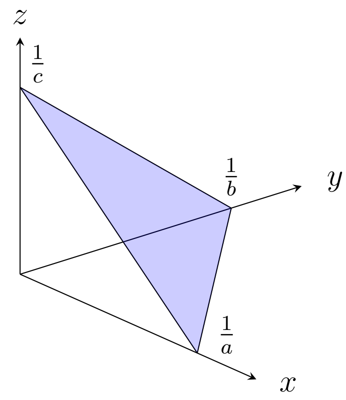
次の図形 F の体積を求めよ．ただし，a, b, c は正の定数とする．

(1) 平面 $ax+by+cz=1$，$x=0$, $y=0$, $z=0$ で囲まれた図形 F．

(2) $F = \{(x,y,z) : 0 \leqq 3x+y \leqq 1, 0 \leqq y+2z \leqq 1, 0 \leqq 2z+3x \leqq 1\}$.

(3) $F = \left\{(x,y,z) : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 \leqq 1\right\}$.

(4) $F = \{(x,y,z) : x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} \leqq a^{2/3}\}$.



解 (1) 図形 F は

$$F=\left\{(x,y,z):\ 0\leqq x\leqq\frac{1}{a},\ 0\leqq y\leqq\frac{1}{b}-\frac{a}{b}x,\ 0\leqq z\leqq\frac{1}{c}-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y\right\}$$

で表される領域であるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(F)=\iiint_F dxdydz&=\int_0^{\frac{1}{a}}dx\int_0^{\frac{1}{b}-\frac{a}{b}x}dy\int_0^{\frac{1}{c}-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y}dz\\
&=\int_0^{\frac{1}{a}}dx\int_0^{\frac{1}{b}-\frac{a}{b}x}[z]_{z=0}^{\frac{1}{c}-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y}dy\\
&=\int_0^{\frac{1}{a}}dx\int_0^{\frac{1}{b}-\frac{a}{b}x}\left(\frac{1}{c}-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y\right)dy\\
&=\frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{a}}\left[(1-ax)y-\frac{b}{2}y^2\right]_{y=0}^{\frac{1}{b}-\frac{a}{b}x}dx\\
&=\frac{1}{2bc}\int_0^{\frac{1}{a}}(1-ax)^2\,dx=\frac{1}{2bc}\left[-\frac{1}{3a}(1-ax)^3\right]_{x=0}^{\frac{1}{a}}=\boldsymbol{\frac{1}{6abc}}.
\end{aligned}$$

(2) 変数変換 $s=3x+y,\ t=y+2z,\ u=2z+3x$ に対する Jacobian は，

$$\frac{\partial(s,t,u)}{\partial(x,y,z)}=\det\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&2\\3&0&2\end{pmatrix}=12$$

であるから，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}=\left(\dfrac{\partial(s,t,u)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}=\dfrac{1}{12}$ となる．一方，この変数変換によって，六面体 $F=\{(x,y,z):0\leqq 3x+y\leqq 1,\,0\leqq y+2z\leqq 1,\,0\leqq 2z+3x\leqq 1\}$ は立方体

$$Q=\{(s,t,u):0\leqq s,t,u\leqq 1\}$$

に写される．したがって，

$$\mathrm{Vol}(F)=\iiint_F dxdydz=\iiint_Q\frac{1}{12}\,dsdtdu=\boldsymbol{\frac{1}{12}}.$$

(3) 相似変換 $s=ax',\ y=by',\ z=cz'$ により $F=\left\{(x,y,z):\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2\leqq 1\right\}$ は

$$B_1=\left\{(x',y',z'):(x')^2+(y')^2+(z')\leqq 1\right\}$$

に写される．また Jacobian は $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')} = \det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$ であるから，$\boxed{\mathbf{1}}$ の球の体積の結果を用いると，

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(F) &= \iiint_F dxdydz = \iiint_{B_1} abc\, dx'dy'dz' \\ &= abc\mathrm{Vol}(B_1) = \boldsymbol{\frac{4\pi abc}{3}}. \end{aligned}$$

(4)　$x^{1/3} = u$, $y^{1/3} = v$, $z^{1/3} = w \iff x = u^3$, $y = v^3$, $z = w^3$ と変数変換すれば，図形 F は

$$B_{a^{1/3}} = \left\{(u,v,w) : u^2 + v^2 + w^2 \leqq a^{2/3}\right\}$$

に写される．Jacobian は $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{pmatrix} = 27u^2v^2w^2$ であるから，

$$\mathrm{Vol}(F) = \iiint_F dxdydz = \iiint_{B_{a^{1/3}}} 27u^2v^2w^2\, dudvdw \cdots ①.$$

さらに，空間の極座標変換

$$u = r\sin\theta\cos\varphi, \quad v = r\sin\theta\sin\varphi, \quad w = r\cos\theta$$
$$(0 \leqq r \leqq a^{1/3},\ 0 \leqq \pi \leqq \theta,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

を用いると，①より

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(F) &= 27 \int_0^{a^{1/3}} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (r\sin\theta\cos\varphi)^2 (r\sin\theta\sin\varphi)^2 (r\cos\theta)^2 \cdot r^2 \sin\theta\, d\varphi \\ &= 27 \left(\int_0^{a^{1/3}} r^8\, dr\right) \left(\int_0^{\pi} \sin^5\theta\cos^2\theta\, d\theta\right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\right) \quad \cdots ②. \end{aligned}$$

ここで，$I_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n \omega d\omega\ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおくと，部分積分より

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\omega(-\cos\omega)'\, d\omega = \left[\sin^{n-1}\omega(-\cos\omega)\right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\omega \underbrace{\cos^2\omega}_{=1-\sin^2\omega} d\omega \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ \iff I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

この漸化式と初期条件 $I_1 = 1,\ I_0 = \frac{\pi}{2}$ を合わせて，②の三角関数の積分を順次求める．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^5\theta\cos^2\theta\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} (\cdots)\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (\cdots)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^2\theta\, d\theta + \int_{\pi/2}^{0} \sin^5(\pi-\psi)\cos^2(\pi-\psi)\,(-d\psi) \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta \\
&= 2(I_5 - I_7) = 2\left(I_5 - \frac{6}{7}I_5\right) \\
&= \frac{2}{7}I_5 = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{16}{105} \qquad \cdots ③,
\end{aligned}$$

ただし，$③_2$ の第 2 項目の積分において変数変換 $\theta = \pi - \psi$ を用いた．同様にして

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi &= 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \\
&= 4(I_2 - I_4) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) I_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \cdots ④.
\end{aligned}$$

以上，③,④を② へ代入して

$$\mathrm{Vol}(F) = 27\cdot\frac{a^3}{9}\cdot\frac{16}{105}\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{4}{35}\pi a^3}.$$

∎

3 (★☆☆)(立体の体積②)

球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2$ と円柱 $x^2+y^2 \leqq a^2$ の共通部分 E の体積を求めよ．

解 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2$ より $|z| \leqq \sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ だから，共通部分 E は

$$E = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqq a^2,\ |z| \leqq \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\right\}$$

と表される．ゆえに，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) = \iiint_E dxdydz &= \iint_{\{x^2+y^2\leqq a^2\}} dxdy \int_{-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz \\
&= \iint_{\{x^2+y^2\leqq a^2\}} 2\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\, dxdy
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{4a^2 - r^2}\cdot r\,dr d\theta \quad (\text{極座標 } x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$
$$= 4\pi\left[-\frac{1}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{a}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4(8-3\sqrt{3})}{3}\pi a^3}.$$

∎

4 (★☆☆)(立体の体積③)

直交 2 円柱 $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $y^2 + z^2 \leqq a^2$ の共通部分 D の体積を求めよ.

解 $D = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqq a^2,\ |z| \leqq \sqrt{a^2 - y^2}\right\}$ と表されるから,

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz = \iint_{\{x^2+y^2 \leqq a^2\}} dxdy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dz$$
$$= \iint_{\{x^2+y^2 \leqq a^2\}} 2\sqrt{a^2 - y^2}\,dxdy$$
$$= 2\int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\,dy$$
$$= 4\int_{-a}^{a} (a^2 - y^2)\,dy$$
$$= 8\left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{a} = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}.$$

∎

Check

【別解】(**Cavalieri の原理**)

D の平面 $y = t$ ($|t| \leqq a$) による切り口の図形 D_t は正方形

$$D_t = \left\{(x, z) : |x| \leqq \sqrt{a^2 - t^2},\ |z| \leqq \sqrt{a^2 - t^2}\right\}$$

であり, その面積は $A(D_t) = \left(2\sqrt{a^2 - t^2}\right)^2 = 4(a^2 - t^2)$. ゆえに, Cavalieri の原理より

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_{-a}^{a} A(D_t)\,dt = 4\int_{-a}^{a} (a^2 - t^2)\,dt = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}.$$

5 (★★☆)(立体の体積④)

次の各曲面で囲まれた立体の体積を求めよ．

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ で囲まれた円柱面 $x^2+y^2=ax$ の内部 D.

(2) 放物面 $x^2+y^2=z$ と柱面 $x^2+y^2=2x$ で囲まれた部分 E.

(3) 曲面 $z^2=4ax\ (a>0)$ と柱面 $x^2+y^2=ax$ で囲まれた部分 F.

解 (1) $D' := \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq ax,\ y \geqq 0\}$ とおく．対称性より D' が球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれた部分の体積の 2 倍が求める体積である．

ここで $x^2+y^2+z^2=a^2$ より $z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ であるから，

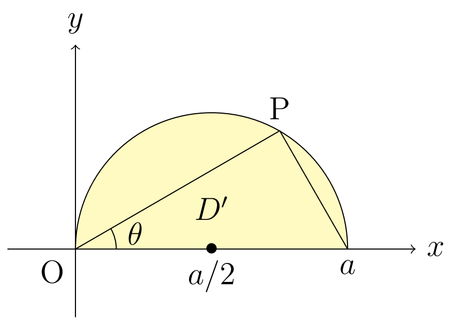
$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz = 2\iint_{D'} dxdy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz$$
$$= 4\iint_{D'} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \qquad \cdots ①.$$

極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ によって D' は

$$\left\{(r,\theta) : 0 \leqq r \leqq a\cos\theta,\ 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

と表される．ゆえに，①より

$$\mathrm{Vol}(D) = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{a\cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^3\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot 1\right) = \boldsymbol{\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3}.$$



(2) 問題の立体 E は

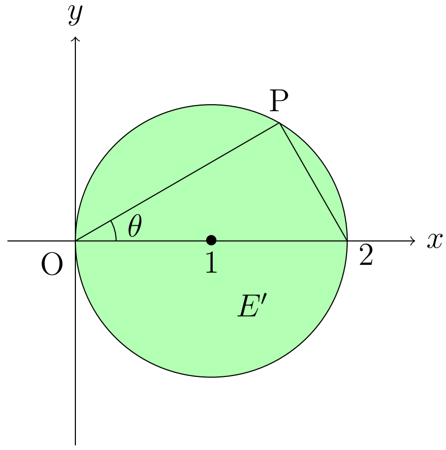
$$E = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqq 2x,\ 0 \leqq z \leqq x^2+y^2\right\}$$

と表される．$E' := \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 2x\}$ とおくと，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ によって E' は

$$\left\{(r,\theta) : 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \iiint_E dxdydz = \iint_{E'} dxdy \int_0^{x^2+y^2} dz \\
&= \iint_{E'} (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cdot r\,drd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta \\
&= 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta \\
&= 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}.
\end{aligned}$$



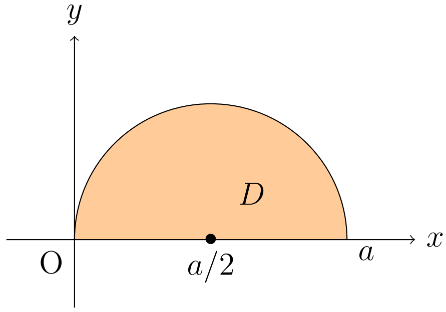
ただし，最後の行で $J_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta$ に対する漸化式 $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ を用いた．

(3)　対称性より $z \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分の体積を 4 倍したものが F の体積に等しい．曲面 $z = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$ と平面 $z = 0$ で挟まれた部分と柱面

$$\begin{aligned}
D &= \{(x,y,z) : x^2+y^2 = ax,\ y \geqq 0\} \\
&= \left\{(x,y,z) : 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{ax-x^2}\right\}
\end{aligned}$$

によって囲まれた立体 F_+ の体積は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(F_+) &= \iint_D dxdy \int_0^{2\sqrt{a}\sqrt{x}} dz \\
&= \iint_D 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dxdy \\
&= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dy \\
&= 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\sqrt{ax-x^2}\,dx \\
&= 4\sqrt{a}\int_0^{\sqrt{a}} (at^2-t^4)\,dt \quad (\because\ \sqrt{a-x} = t \text{ の変数変換}) \\
&= \frac{8}{15}a^3.
\end{aligned}$$



(平面 $z = t$ 上での柱面 D)

したがって，求めるべき F の体積は

$$\mathrm{Vol}(F) = 4\mathrm{Vol}(F_+) = \boldsymbol{\frac{32}{15}a^3}.$$

∎

6 (★★☆)(回転トーラスの体積)

次の3次元空間内の立体 $\mathbf{T}$ の体積を求めよ．

$$\mathbf{T} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 + z^2 \leqq 1\right\}.$$

解 $\mathbf{T}$ を平面 $z = h$ $(-1 \leqq h \leqq 1)$ で切断したときの切り口 $\mathbf{T}_h$ は

$$\mathbf{T}_h : \ -\sqrt{4(1-h^2)} \leqq \sqrt{x^2+y^2} - 3 \leqq \sqrt{4(1-h^2)}$$

で与えられる．$\mathbf{T}_h$ は半径 $3+\sqrt{4(1-h^2)}$ の円板から，半径 $3-\sqrt{4(1-h^2)}$ の円板をくり抜いたものであるので，$\mathbf{T}_h$ の面積は

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\mathbf{T}_h) &= \pi\left\{\left(3+\sqrt{4(1-h^2)}\right)^2 - \left(3-\sqrt{4(1-h^2)}\right)^2\right\}\\ &= 24\pi\sqrt{1-h^2}.\end{aligned}$$

したがって Cavalieri の原理より

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbf{T}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{Area}(\mathbf{T}_h)\,dh = 48\pi \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-h^2}\,dh}_{=\frac{\pi}{4}}\\ = \boldsymbol{12\pi^2}.\end{aligned}$$

∎

Check

一般に，$\mathbb{T} : \left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2 + z^2 = r^2$ $(R > r > 0)$ を回転トーラスとよぶ．$\mathbb{T}$ は円 $C : (x-R)^2 + z^2 = r^2$ を z 軸の周りに回転させて得られる立体で，パラメーター $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ を用いて，

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta$$

と表される．ここで取り上げた立体 $\mathbf{T}$ は"中身の詰まった"トーラスであり，$\mathbf{T}$ の境界 (表面) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 + z^2 = 1$ は

$$x = (3 + 2\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (3 + 2\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = \sin\theta$$

と表される．

7 (★★☆)(囲まれた部分の立体の体積①)

$z = 5x^2 + xy - y^2 - 3$ と $z = -3x^2 + xy - 3y^2 + 5$ とで囲まれた立体の体積 V を求めよ.

解 与えられた 2 曲面に対して

$$\begin{aligned} & 5x^2 + xy - y^2 - 3 > -3x^2 + xy - 3y^2 + 5 \quad \cdots ① \\ \iff & 8x^2 + 2y^2 - 8 > 0 \\ \iff & x^2 + \frac{y^2}{4} > 1 \end{aligned}$$

であるので，①を満たすのは非有界領域 $\left\{x^2 + \frac{y^2}{4} > 1\right\}$ 上である．ゆえに，囲まれる領域があるのは

$$D := \left\{(x, y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leqq 1\right\}$$

であり，D 上で (①より)

$$5x^2 + xy - y^2 - 3 \leqq -3x^2 + xy - 3y^2 + 5$$

が成り立つ．よって，求めるべき立体の体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \Big[(-3x^2 + xy - 3y^2 + 5) - (5x^2 + xy - y^2 - 3)\Big]\, dxdy \\ &= \iint_D \big[-8x^2 - 2y^2 + 8\big]\, dxdy \quad \cdots ② \end{aligned}$$

で与えられる．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$ を考えると Jacobian は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$$

であり，この変換によって積分領域 D は $D' = \{(r, \theta) : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi\}$ にうつる．ゆえに，②より

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D'} \big[-8r^2 + 8\big] \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| drd\theta \\ &= 16 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \big[-r^2 + 1\big] r\, drd\theta \\ &= 32\pi \left[-\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^1 = \boldsymbol{8\pi}. \end{aligned}$$

■

8 (★★☆)(囲まれた部分の立体の体積②)

$f(x)$ を正値連続関数，$B_R := \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ とし，$0 \leqq t \leqq 1$ とする．このとき，次の領域 Ω_t の体積 $V(\Omega_t)$ は t の値によらず一定であることを示せ：

$$\Omega_t := \left\{(x, y, z) : (x, y) \in B_R,\ 0 \leqq z \leqq \frac{tf(x) + (1-t)f(y)}{f(x) + f(y)}\right\}.$$

解 Ω_t の体積 $V(\Omega_t)$ は

$$V(\Omega_t) = \iint_{B_R} \frac{tf(x) + (1-t)f(y)}{f(x) + f(y)}\, dxdy$$

で与えられる．したがって，

$$\begin{aligned} V(\Omega_t) &= t \iint_{B_R} \frac{f(x)}{f(x) + f(y)}\, dxdy + (1-t) \iint_{B_R} \frac{f(y)}{f(x) + f(y)}\, dxdy \\ &=: t\mathbf{I} + (1-t)\mathbf{II}, \end{aligned}$$

ただし，

$$\mathbf{I} := \iint_{B_R} \frac{f(x)}{f(x) + f(y)}\, dxdy, \qquad \mathbf{II} := \iint_{B_R} \frac{f(y)}{f(x) + f(y)}\, dxdy.$$

$\mathbf{I} + \mathbf{II} = \displaystyle\iint_{B_R} \frac{f(x) + f(y)}{f(x) + f(y)}\, dxdy = A(B_R)$ であり，x と y の役割を入れ替えることにより，$\mathbf{I} = \mathbf{II}$．
ゆえに，$\mathbf{I} = \mathbf{II} = \frac{A(B_R)}{2}$ であるから，

$$V(\Omega_t) = t\frac{A(B_R)}{2} + (1-t)\frac{A(B_R)}{2} = \frac{A(B_R)}{2} = \frac{\pi R^2}{2}$$

となり，t の値によらず一定である． ∎