§12 重積分の変数変換　演習問題 1

✐ **問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★**

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**変数変換①**)　次の各問いに答えよ．

(1) 変数変換 $x = u^2,\ y = \dfrac{v}{u}$ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}, \quad D := \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

を求めよ．

$\boxed{2}$ (★☆☆)(**変数変換②**)　次の各問いに答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy, \quad D := \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 4x,\ 1 \leqq xy \leqq 2\}$$

を求めよ．

$\boxed{3}$ (★☆☆)(**変数変換③**)　次の各問いに答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x^2}$ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_D (x^6+y^6)\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) \mid 1 \leqq xy \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq 2x^2\right\}$$

を求めよ．

$\boxed{4}$ (★★☆)(**変数変換④**)　$a > b > 0$ を定数とする．次の各問いに答えよ．

(1) D を 4 曲線 $y = bx^2,\ y = ax^2,\ x = by^2,\ x = ay^2$ で囲まれた領域とする．D を図示せよ．

(2) 変数変換 $u = \dfrac{x}{y^2},\ v = \dfrac{y}{x^2}$ を考えることにより D の面積を求めよ．また，重積分

$$\iint_D xy\,dxdy$$

を求めよ．

$\boxed{5}$ (★★☆)(**極座標変換①**)　次の各問いに答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta\ (r > 0,\, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ の Jocobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ．

(2) 極座標変換により重積分

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D := \{(x,y) \mid 2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\, x \geqq 0,\, y \geqq 0\}$$

を求めよ．

$\boxed{6}$ (★★☆)(**極座標変換②**)　極座標変換を考えることにより，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{B(R)} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$，$B(R) := \{(x,y) \mid x^2+y^2 < R^2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$，$D := \{(x,y) \mid y \leqq x^2+y^2 \leqq 1, x \geqq 0\}$

$\boxed{7}$ (★★☆)(**極座標変換③**)　次の問いに答えよ．

(1) 空間の極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を求めよ．ただし，$r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi$ とする．

(2) $B(1)_+ := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\, x \geqq 0,\, y \geqq 0\}$ とおく．3 重積分

$$\iiint_{B(1)_+} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$$

を空間の極座標変換を用いて求めよ．

$\boxed{8}$ (★★☆)(**広義積分への応用①**)　n を自然数とし,

$$B(n) := \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq n^2\right\}$$

$$E(n) := \{(x, y) \mid |x| \leqq n,\ |y| \leqq n\}$$

とおく．次の各問いに答えよ.

(1) 次を示せ.

$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leqq \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leqq \iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(2) 次を示せ.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\boxed{9}$ (★★★)(**広義積分への応用②**)　次の重積分の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \iint_{B(n)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy.$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \iint_{B(n)} |x-y|e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$

ここに，n は自然数で $B(n) := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq n^2\}$ は半径 n の円板を表す.

✓**HINT.** (2) 変数変換 $u = x + y$, $v = x - y$ を考える.