§12 重積分の変数変換　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(変数変換①)

次の各問いに答えよ.

(1) 変数変換 $x = u^2,\ y = \dfrac{v}{u}$ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}, \qquad D := \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

を求めよ.

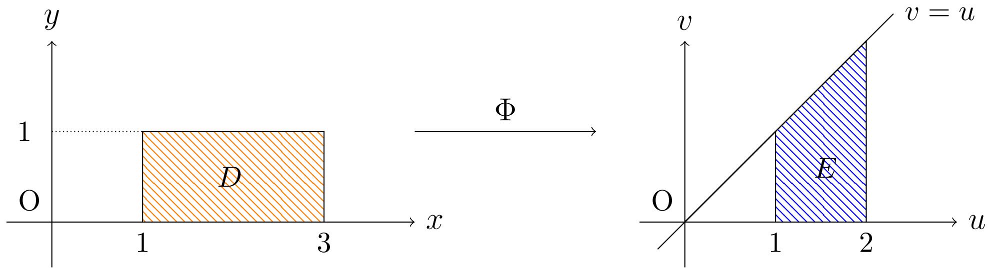
解 (1) $x = u^2,\ y = \dfrac{v}{u}$ に対し

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & u_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} = \mathbf{2}.$$

(2) $(x,y) \in D$ とすると $1 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq 1 \cdots$①. $x = u^2,\ y = \dfrac{v}{u}$ を u と v について解けば

$$u = \sqrt{x}, \quad v = uy.$$

x, y は①の範囲を動くので, $1 \leqq u \leqq \sqrt{3},\ 0 \leqq v \leqq u$. すなわち変換 $u = \sqrt{x}, \quad v = uy (= \sqrt{x}y)$ で定まる写像 Φ は領域 D を領域 $E := \left\{(u,v) \mid 1 \leqq u \leqq \sqrt{3},\ 0 \leqq v \leqq u\right\}$ へ写す.



ゆえに, $dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dxdy = 2\,dxdy$ であるから,

$$\begin{aligned} I := \iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)} &= \iint_E \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)} 2dudv \\ &= 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^u \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)}\,dv \right) du. \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^u \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)}\,dv = \frac{1}{1+v^2}\left[\operatorname{Arctan} v\right]_{v=0}^{u}$$

$$= \frac{1}{1+u^2}\mathrm{Arctan}\, v$$
$$= (\mathrm{Arctan}\, u)' \mathrm{Arctan}\, u$$
$$= \left\{ \frac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\, u)^2 \right\}'.$$

したがって,

$$I = 2\int_1^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\, u)^2 \right\}' du = (\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3})^2 - (\mathrm{Arctan}\, 1)^2$$
$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{7}{144}\pi^2}.$$

∎

$\boxed{2}$ (★☆☆)(変数変換②)

次の各問いに答えよ.

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy, \quad D := \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 4x,\ 1 \leqq xy \leqq 2\}$$

を求めよ.

解 (1) $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$ に対し

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{2y}{x}.$$

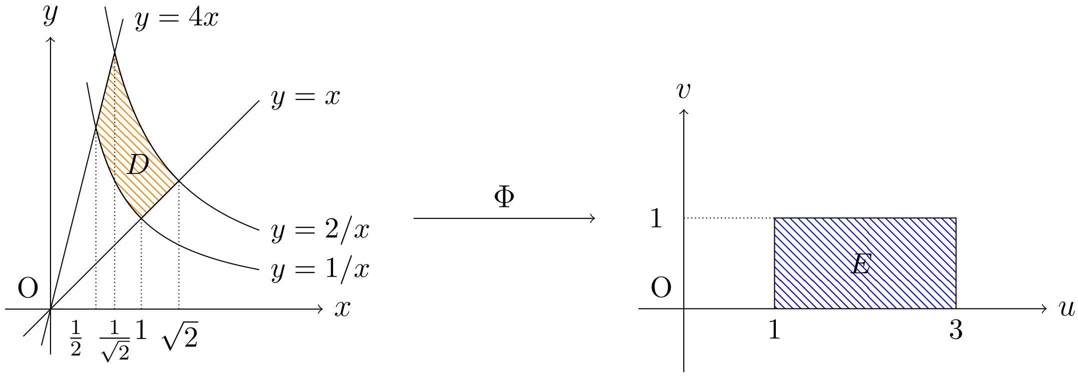
ゆえに, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ であるから,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \boldsymbol{\frac{x}{2y}}.$$

(2) $(x,y) \in D$ とすると $0 \leqq x \leqq y \leqq 4x,\ 1 \leqq xy \leqq 2 \cdots$①. x, y は①の範囲を動くので, $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$ の動く範囲は

$$1 \leqq u \leqq 2,\ 1 \leqq v \leqq 4.$$

すなわち, 変換 $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$ で定まる写像 Φ は領域 D を領域 $E := \{(u,v) \mid 1 \leqq u \leqq 2,\ 1 \leqq v \leqq 4\}$ へ写す.



ゆえに，$dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \dfrac{1}{2|v|} dudv$ であるから，

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2y^2\,dxdy &= \iint_E u^2 \frac{1}{2|v|}\,dudv \\
&= \int_1^4 \int_1^2 u^2 \frac{1}{2v}\,dudv \qquad (\because v>0 \text{ in } E) \\
&= \left(\int_1^4 \frac{1}{2v}\,dv\right)\left(\int_1^2 u^2\,du\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}\log v\right]_{v=1}^4 \left[\frac{u^3}{3}\right]_{u=1}^2 \\
&= \frac{1}{2}\log 4 \cdot \frac{7}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{3}\log 2}.
\end{aligned}$$

■

3 (★☆☆)(変数変換③)

次の各問いに答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x^2}$ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_D (x^6+y^6)\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) \mid 1 \leqq xy \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq 2x^2\right\}$$

を求めよ．

解 (1) $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x^2}$ に対して，

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{2y}{x^2} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = \frac{3y}{x^2}.$$

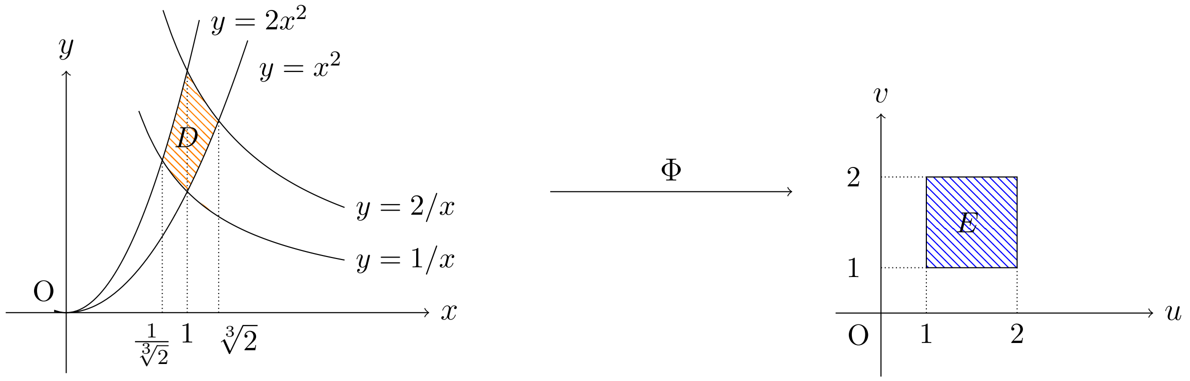
よって $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ であるから，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \boldsymbol{\frac{x^2}{3y}}.$$

(2) $(x,y)\in D$ とすると $1\leqq xy\leqq 2,\ x^2\leqq y\leqq 2x^2\cdots$①. $u=xy,\ v=\dfrac{y}{x^2}\cdots$② だから①より

$$1\leqq u\leqq 2,\ 1\leqq v\leqq 2.$$

すなわち, 変換 $u=xy,\ v=\dfrac{y}{x^2}$ で定まる写像 Φ は領域 D を領域 $E:=\{(u,v)\mid 1\leqq u\leqq 2,\ 1\leqq v\leqq 2\}$ へ写す.



ゆえに, (1) より $dxdy=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\dfrac{1}{3|v|}dudv$ であり, ②より

$$y^3=u^2v,\quad x^3=\frac{u^3}{y^3}=\frac{1}{uv}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\iint_D(x^6+y^6)\,dxdy&=\iint_E\left\{(u^2v)^2+\left(\frac{1}{uv}\right)^2\right\}\frac{1}{3|v|}\,dudv\\
&=\frac{1}{3}\iint_E\left(u^4v+\frac{1}{u^2v^3}\right)dudv\qquad(\because v>0\text{ in }E)\\
&=\frac{1}{3}\left(\int_1^2u^4\,du\right)\left(\int_1^2v\,dv\right)+\frac{1}{3}\left(\int_1^2\frac{1}{u^2}\,dy\right)\left(\int_1^2\frac{1}{v^2}\,dv\right)\\
&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}u^5\right]_{u=1}^2\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v=1}^2+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=1}^2\left[-\frac{1}{2v^2}\right]_{v=1}^2\\
&=\frac{31}{10}+\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{253}{80}}.
\end{aligned}$$

∎

4 (★★☆)(変数変換④)

$a>b>0$ を定数とする. 次の各問いに答えよ.

(1) D を 4 曲線 $y=bx^2,\ y=ax^2,\ x=by^2,\ x=ay^2$ で囲まれた領域とする. D を図示せよ.

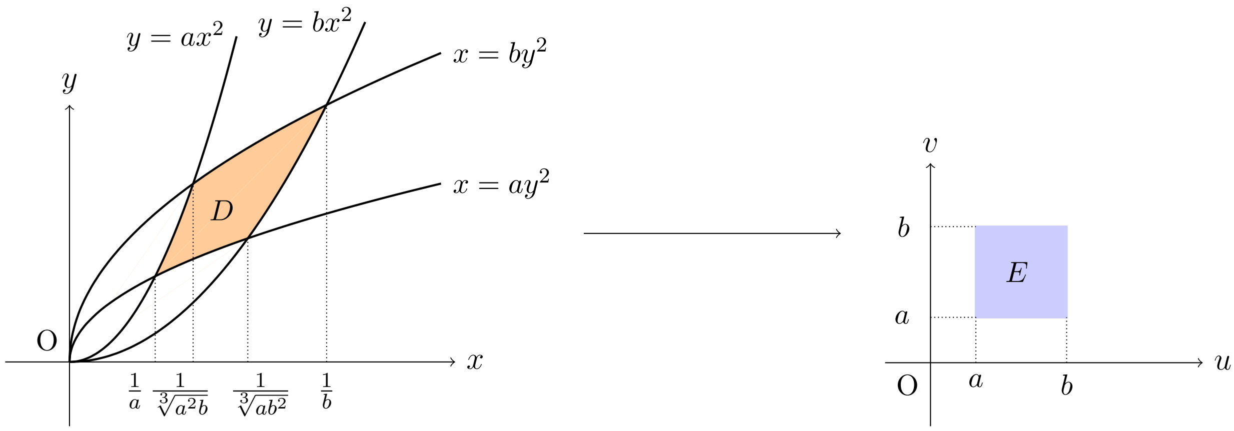
(2) 変数変換 $u=\dfrac{x}{y^2}$, $v=\dfrac{y}{x^2}$ を考えることにより D の面積を求めよ．また，重積分

$$\iint_D xy\,dxdy$$

を求めよ．

解 (1) $y=ax^2$ と $x=ay^2$ の原点以外の交点の x 座標は $x=a(ax^2)^2$ すなわち $x(1-(ax)^3)=0$ を満たす．よって $x=\dfrac{1}{a}$ だから，交点は $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$．同様に $y=bx^2$ と $x=by^2$ の交点は $\left(\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{b}\right)$．$y=bx^2$ と $x=ay^2$ の原点以外の交点の x 座標は $x=a(bx^2)^2$，すなわち $x(1-ab^2x^3)=0$ を満たす．したがって，$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{ab^2}}$ だから，交点は $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{ab^2}},\dfrac{b}{\sqrt[3]{(ab^2)^2}}\right)$．以上に注意して，下左図を得る．ただし，

$$D=\left\{(x,y)\mid by^2\leqq x\leqq ay^2,\ bx^2\leqq y\leqq ax^2\right\}.$$



(2) $(x,y)\in D \iff by^2\leqq x\leqq ay^2,\ bx^2\leqq y\leqq ax^2$ とすると，変数変換 $u=\dfrac{x}{y^2}$, $v=\dfrac{y}{x^2}$ で次と同値：

$$b\leqq u\leqq a,\ b\leqq v\leqq a$$

ゆえに $(x,y)\mapsto(u,v)=\left(\dfrac{x}{y^2},\dfrac{y}{x^2}\right)$ は領域 D を領域 $E=\{(u,v)\mid b\leqq u\leqq a,\ b\leqq v\leqq a\}$ に写す．このとき，

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3}\\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{pmatrix}=\frac{5}{x^2y^2}=5(uv)^2 \quad (\because\ uv=\frac{1}{xy})$$

$$\therefore\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{5u^2v^2}$$

ゆえに，$dx\,dy=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\dfrac{1}{5u^2v^2}du\,dv$ であるから，

$$|D|=\iint_D dx\,dy=\iint_E\frac{1}{5u^2v^2}du\,dv=\frac{1}{5}\left(\int_a^b\frac{1}{u^2}du\right)\left(\int_b^a\frac{1}{v^2}dv\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{v-b}^{a}\left[-\frac{1}{v}\right]_{v=b}^{a}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^2=\boldsymbol{\frac{(a-b)^2}{5a^2b^2}}.$$

また，

$$\iint xy\,dx\,dy = \iint_E \frac{1}{uv}\cdot\frac{1}{5u^2v^2}du\,dv = \frac{1}{5}\left(\int_a^b \frac{1}{u^3}du\right)\left(\int_b^a \frac{1}{v^3}dv\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_{v-b}^{a}\left[-\frac{1}{2v^3}\right]_{v=b}^{a} = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{(a^2-b^2)^2}{20a^4b^4}}.$$

∎

5 (★★☆)(極座標変換①)

次の各問いに答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ の Jocobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ．

(2) 極座標変換により重積分

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D := \{(x,y) \mid 2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

を求めよ．

解 (1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ に対して，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}.$$

(2) $(x,y) \in D \iff 2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4, x \geqq 0, y \geqq 0$ すなわち，

$$1 \leqq (x-1)^2+y^2,\ x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0.$$

円周 $(x-1)^2+y^2 = 1$ 上の任意の点 P は図のように θ をとると，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\overline{\mathrm{OP}} = 2\cos\theta$ となる．ゆえに，D は極座標上で

$$D' = \left\{(r,\theta) \mid 2\cos\theta \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

と書ける．よって，(1) より $dx\,dy = rdr\,d\theta$ であるから，

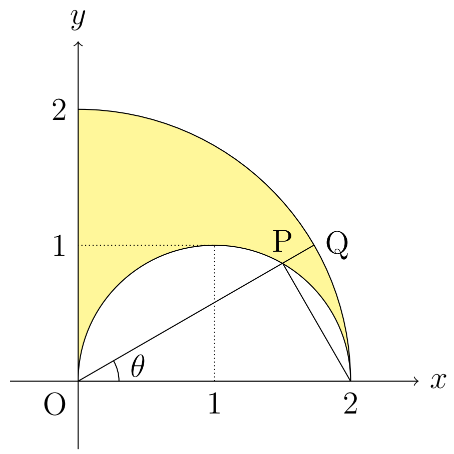
$$\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy = \iint_{D'} r^2\cdot rdr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{2\cos\theta}^2 r^3dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=2\cos\theta}^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)d\theta$$

$$= 2\pi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta.$$



ここで，$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta(\sin\theta)'d\theta &= \Big[\cos^3\theta\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta\,d\theta\\ &=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta\\ &=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta-3I\\ &=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta-3I\\ \therefore\ I=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta &=\frac{3}{8}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{16}\pi.\end{aligned}$$

以上より，

$$\iint_D(x^2+y^2)dx\,dy=2\pi-\frac{3}{16}\pi=\boldsymbol{\frac{29}{16}\pi}.$$

∎

6 (★★☆)(極座標変換②)

極座標変換を考えることにより，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{B(R)}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy,\quad B(R):=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2},\quad D:=\{(x,y)\mid y\leqq x^2+y^2\leqq 1, x\geqq 0\}$

解 (1) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を考えると，$B(R)$ は

$$B'(R)=\{(r,\theta)\mid 0\leqq\theta<2\pi,\ 0\leqq r<R\}$$

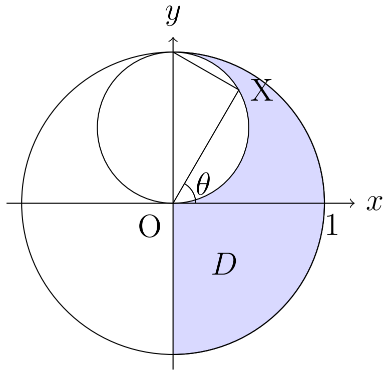
と表される．$\boxed{5}$-(1) より，Jocobian は $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ で与えられるから，

$$\begin{aligned}\iint_{B(R)}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy&=\iint_{B'(R)}e^{-r^2}r dr\,d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-r^2}rdr\right)d\theta=2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R=\boldsymbol{\pi(1-e^{-R^2})}.\end{aligned}$$

(2) $(x,y)\in D\iff y\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0$ すなわち，

$$\frac{1}{4}\leqq x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2,\ x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0.$$

を満たす．



円周 $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ 上の任意の点 X は，図のように動径 OX の偏角を θ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，

$$\overline{\mathrm{OX}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta.$$

したがって，領域 D は極座標変換で

$$D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \sin\theta \leqq r \leqq 1\right\} \cup \left\{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0,\ 0 \leqq r \leqq 1\right\}$$

と 2 つの合併集合として表される．そこで，

$$D_+ := \left\{(r,\theta) \mid 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \sin\theta \leqq r \leqq 1\right\},\ D_- := \left\{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0,\ 0 \leqq r \leqq 1\right\}$$

とおく．積分領域を 2 つに分けて計算する．

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \left(\iint_{D_+} + \iint_{D_-}\right) \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr\,d\theta := I_+ + I_-.$$

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin\theta}^1 \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2(1+r^2)}\right]_{r=\sin\theta}^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} - \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

実際，$\tan\theta = t$ の置換で $\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{2} \ \longleftrightarrow\ t : 0 \to +\infty$ であるから，

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = dt \quad \therefore d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$．よって，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2}t)\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi. \end{aligned}$$

一方，

$$I_- = \iint_{D_-} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}\right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

であるから，以上をまとめて，

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8}}.$$

∎

7 (★★☆)(極座標変換③)

次の問いに答えよ.

(1) 空間の極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を求めよ．ただし，$r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ とする.

(2) $B(1)_+ := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とおく．3 重積分

$$\iiint_{B(1)_+} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\, dxdydz$$

を空間の極座標変換を用いて求めよ.

解 (1) 第 3 行に関して余因子展開すると

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{3+1}\cos\theta\cdot\det\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\cdot\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \cos\theta\cdot r^2\cos\theta\sin\theta + r\sin\theta\cdot r\sin^2\theta \\
&= \boldsymbol{r^2\sin\theta}.
\end{aligned}$$

(2) 極座標変換により

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

であって，$B(1)_+$ は $D = \left\{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ へ写される．よって,

$$\begin{aligned}
\iiint_{B(1)_+} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\, dxdydz &= \iiint_D \sqrt{1-r^2}r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= \left(\int_0^1 \sqrt{1-r^2}r^2\, dr\right)\underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right)}_{=2}\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}r^2\, dr \quad \cdots ①.
\end{aligned}$$

ここで $r=\sin u$ の変数変換をすると $dr=\cos u\,du$, $r:0\to 1 \longleftrightarrow u:0\to\frac{\pi}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}r^2\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \sin^2 u\,du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u\,du &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4u}{2}\,du \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{u}{2}-\frac{1}{8}\sin 4u\right]_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

これを①へ代入して,

$$\iiint_{B(1)_+} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{16}}.$$

■

$\boxed{8}$ (★★☆)(広義積分への応用①)

n を自然数とし,

$$B(n) := \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq n^2\right\}$$
$$E(n) := \{(x,y) \mid |x|\leqq n,\ |y|\leqq n\}$$

とおく. 次の各問いに答えよ.

(1) 次を示せ.

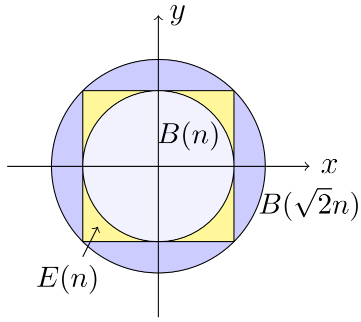
$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leqq \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leqq \iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(2) 次を示せ.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

解 (1) $B(n)\subset E(n)\subset B(\sqrt{2}n)$ であるので, $e^{-(x^2+y^2)}\geqq 0$ より

$$\begin{aligned}&\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &\leqq \iint_{E(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leqq \iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.\end{aligned}$$



ここで,

$$\iint_{E(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

であるから,

$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leqq \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leqq \iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \quad \cdots ①.$$

(2) ①の最左辺の重積分で極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考えると Jacobian は r であるから,

$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-r^2} r\,drd\theta = 2\pi\int_0^n e^{-r^2} r\,dr$$
$$= 2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_{r=0}^{n} = \pi(1-e^{-n^2}).$$

同様に,

$$\iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \pi(1-e^{-2n^2}).$$

ゆえに，これらを①へ代入して全体を $1/2$ 乗すると

$$\sqrt{\pi(1-e^{-2n^2})} \leqq \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \leqq \sqrt{\pi(1-e^{-n^2})}.$$

さらに e^{-x^2} は偶関数であるので上の不等式より

$$\frac{\sqrt{\pi(1-e^{-2n^2})}}{2} \leqq \int_0^n e^{-x^2}\,dx \leqq \frac{\sqrt{\pi(1-e^{-n^2})}}{2}.$$

$n\to\infty$ のとき最左辺，最右辺ともに $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ に収束するから,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となり証明された. ∎

9 (★★★)(広義積分への応用②)

次の重積分の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\iint_{B(n)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy.$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\iint_{B(n)} |x-y|e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$

ここに，n は自然数で $B(n) := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq n^2\}$ は半径 n の円板を表す.

✓**HINT.** (2) 変数変換 $u = x+y,\ v = x-y$ を考える.

解 (1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考えると，Jacobian は r だから,

$$\iint_{B(n)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^n \frac{\log(1+r^2)}{(1+r^2)^2}\,rdrd\theta$$
$$= 2\pi\int_0^n \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+r^2}\right)'\log(1+r^2)\,dr$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{1+r^2}\log(1+r^2) \right]_0^n + \pi \int_0^n \frac{2r}{(1+r^2)^2}\,dr$$
$$= -\pi \frac{\log(1+n^2)}{1+n^2} + \pi \left[-\frac{1}{1+r^2} \right]_0^n$$
$$= -\pi \frac{\log(1+n^2)}{1+n^2} + \pi \left(1 - \frac{1}{1+n^2} \right).$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{B(n)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = \boldsymbol{\pi}.$$

(2)　変数変換 $u = x+y,\ v = x-y$ を考えると，

$$x = \frac{u+v}{2},\ y = \frac{u-v}{2} \qquad \therefore\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

また，$(x,y) \in B(n)$ より

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \leqq n^2 \iff u^2+v^2 \leqq (\sqrt{2}n)^2.$$

よって，

$$\iint_{B(n)} |x-y| e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{B(\sqrt{2}n)} |v| e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \frac{1}{2} dudv \quad \cdots ①.$$

さらに，極座標変換 $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$ を考えると，

$$\iint_{B(\sqrt{2}n)} |v| e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}n} r|\sin\theta| e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,drd\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\,d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}n} r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr\right) \quad \cdots ②.$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \sin\theta\,dx = 4$ であり，

$$\int_0^{\sqrt{2}n} r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr = -2\int_0^{\sqrt{2}n} \left(e^{-\frac{1}{2}r^2}\right)' r dr$$
$$= \left[-2e^{-\frac{1}{2}r^2} r \right]_0^{\sqrt{2}n} + 2\int_0^{\sqrt{2}n} e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr$$
$$= -2\sqrt{2}ne^{-\frac{n}{2}} + 2\sqrt{2}\int_0^n e^{-t^2}\,dt \cdots ③.$$

ただし，最後の行で変数変換 $r = \sqrt{2}t$ を用いた．

ゆえに，①,②,③および $\boxed{8}$ の結果を用いれば

$$\iint_{B(\sqrt{2}n)} |v| e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \frac{1}{2} dudv = -4\sqrt{2}ne^{-\frac{n}{2}} + 4\sqrt{2}\int_0^n e^{-t^2}\,dt$$
$$\to 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boldsymbol{2\sqrt{2\pi}}.$$

∎