§11 積分の順序交換　演習問題 3

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★★☆)(等式の証明)

$0 < \alpha < \beta$ とする．

(1) $\partial_y \left(\dfrac{x^y}{\log x} \right)$ を求めよ．

(2) 次の等式を示せ：

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\log x}\,\mathrm{d}x = \log\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right).$$

$\boxed{2}$ (★★★)(融合問題)

$f(x)$ を平均 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0$ かつ $f(x) = 0$ $(|x| > 1)$ を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 (ただし，$x = (x_1, x_2)$ と表す) また，$h(t)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t)\,\mathrm{d}t = 1$ かつ $h(t) = 0$ $(|t| > 1)$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 g_0, g_1, g_2 を

$$g_0(x) := f(x), \quad g_1(x) := h(x_1)\int_{\mathbb{R}} f(y_1, x_2)\,\mathrm{d}y_1,$$
$$g_2(x) := h(x_1)h(x_2)\iint_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

とおくとき，g_i $(i = 0, 1, 2)$ は C^1 級かつ $g_i(x) = 0$ $(|x| > 1)$ を満たすことを示せ．

(2)

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{x_1} (g_0 - g_1)(y, x_2)\,\mathrm{d}y, \quad F_2(x) := \int_{-\infty}^{x_2} (g_1 - g_2)(x_1, y)\,\mathrm{d}y$$

とし，$\boldsymbol{F}(x) := (F_1(x), F_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ とおく．このとき，$\boldsymbol{F}(x)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級ベクトル値関数で，次を満たすことを示せ．

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{F}(x) = f(x), \\ x_i > 1 \ \ (i = 1, 2) \implies \boldsymbol{F}(x) = 0. \end{cases}$$

ただし，$\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ は勾配作用素，$\cdot$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積を表す．