§11 積分の順序交換　演習問題 2

✐ **問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★**

$\boxed{\mathbf{1}}$ (★★★)(**順序交換を用いた等式の証明**)

次の各問いに答えよ．

(1) 実数 $y > 1$ を定数とみて，定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{y-\cos x}$ を計算せよ．

✓**HINT.** 変数変換 $\tan\frac{x}{2} = t$ を考える．

(2) $1 < a < b$ のとき，

$$\int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx = \pi\log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

であることを積分の順序交換を用いることにより求めよ．

✓**HINT.** 長方形領域 $D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq \pi, a \leqq y \leqq b\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y-\cos x}\,dxdy$ を計算する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (★★★)(**積分記号下の微分**)

$f(x,y)$ は長方形領域 $D := \{(x,y) : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ 上で偏微分可能で，偏導関数 $f_y(x,y)$ は D 上連続であるとする．このとき，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f_y(x,y)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (★★★)(e^{-x^2} **の広義積分の計算**)

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

とおく．次の各問いに答えよ．

(1) $\boxed{\mathbf{2}}$ の積分記号下での微分を用いて，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ を求めよ．

✓**HINT.** 非積分関数を $f(t,x) := \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ とおく．長方形領域 $\{(t,x) : 0 \leqq t \leqq 1, -R \leqq x \leqq R\}$（ただし $R > 0$ は十分大きな任意の正数）で偏導関数 $f_x(t,x)$ が連続であることを確かめた後，積分記号下での微分を用いて計算を実行する．

(2) $F'(x) = 0$ を示せ.

(3) $F(x)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.

$\boxed{4}$ (★★★)(**積分の順序交換**)

$f(t)$ を閉区間 $[0, T]$ 上で連続とする. 次の問いに答えよ.

(1) 積分の順序を入れ替えることにより,

$$\int_0^T \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) dx = \int_0^T (T-t) f(t)\,dt$$

を示せ.

(2) (1) を用いて, 等式

$$\int_0^T \left[\int_0^x \left(\int_0^y f(t)\,dt \right) dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^T (T-t)^2 f(t)\,dt$$

を示せ.