§11 積分の順序交換　演習問題 3　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(等式の証明)

$0 < \alpha < \beta$ とする.

(1) $\partial_y \left(\dfrac{x^y}{\log x} \right)$ を求めよ.

(2) 次の等式を示せ：

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\log x}\, \mathrm{d}x = \log\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right).$$

解 (1) $\partial_y \left(\dfrac{x^y}{\log x} \right) = \boldsymbol{x^y}$.

(2) 積分の順序交換より,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\log x}\, \mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_{y=\alpha}^{\beta} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \int_{\alpha}^{\beta} x^y \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \mathrm{d}y \\
&= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-\varepsilon_2)^{y+1} - \varepsilon_1^{y+1}}{y+1}\, \mathrm{d}y =: \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \downarrow 0} (\mathrm{I})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \qquad \cdots ①.
\end{aligned}$$

ここで，積分項 $(\mathrm{I})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ について以下のように考察する：

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y+1}\, \mathrm{d}y &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-\varepsilon_2)^{y+1} - 1}{y+1}\, \mathrm{d}y - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon_1^{y+1}}{y+1}\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{1}^{1-\varepsilon_2} x^y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon_1^{y+1}}{y+1}\, \mathrm{d}y =: T_{\varepsilon_2} + T_{\varepsilon_1}.
\end{aligned}$$

まず,

$$\begin{aligned}
|T_{\varepsilon_2}| \leqq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{1-\varepsilon_2}^{1} x^y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &\leqq (\beta - \alpha) \int_{1-\varepsilon_2}^{1} x^\alpha \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\beta-\alpha}{\alpha+1} \left[1 - (1-\varepsilon_2)^{\alpha+1} \right] \to_{\varepsilon_2 \downarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

次に，

$$|T_{\varepsilon_1}| \leqq \varepsilon_1^{\alpha+1} \int_\alpha^\beta \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \to_{\varepsilon_1\downarrow 0} 0$$

であるから，

$$\left| (\mathrm{I})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} - \int_\alpha^\beta \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \right| \quad \leqq \quad |T_{\varepsilon_2}| + |T_{\varepsilon_1}| \to_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\downarrow 0} 0.$$

したがって，①の最後の行から，

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\downarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\log x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\downarrow 0} (\mathrm{I})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \log\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)$$

となって所望の等式を得る． ∎

2 (★★★)(融合問題)

$f(x)$ を平均 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0$ かつ $f(x)=0$ $(|x|>1)$ を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 (ただし，$x=(x_1,x_2)$ と表す) また，$h(t)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t)\,\mathrm{d}t = 1$ かつ $h(t)=0$ $(|t|>1)$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 g_0, g_1, g_2 を

$$g_0(x) := f(x), \quad g_1(x) := h(x_1)\int_{\mathbb{R}} f(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1,$$
$$g_2(x) := h(x_1)h(x_2)\iint_{\mathbb{R}^2} f(y_1,y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

とおくとき，g_i $(i=0,1,2)$ は C^1 級かつ $g_i(x)=0$ $(|x|>1)$ を満たすことを示せ．

(2)

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{x_1} (g_0-g_1)(y,x_2)\,\mathrm{d}y, \quad F_2(x) := \int_{-\infty}^{x_2} (g_1-g_2)(x_1,y)\,\mathrm{d}y$$

とし，$\boldsymbol{F}(x) := (F_1(x),F_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ とおく．このとき，$\boldsymbol{F}(x)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級ベクトル値関数で，次を満たすことを示せ．

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{F}(x) = f(x), \\ x_i > 1 \ \ (i=1,2) \implies \boldsymbol{F}(x) = 0. \end{cases}$$

ただし，$\nabla = (\partial_{x_1},\partial_{x_2})$ は勾配作用素，$\cdot$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積を表す．

解 (1)　$g_0(x)=f(x)$，$g_2(x)=0$ が C^1 級かつ $|x|>1$ で消えることは明らか．以後，$g_1(x)$ について考察する．$h(t)$ は C^1 級なので，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1$ が x_2 について C^1 級であることを示す．

まず f は C^1 級であるから，$\partial_{x_2}f(y_1,x_2)$ は $-\infty<x_2<\infty$ で連続．次に

$$G(x_2):=\int_{\mathbb{R}}\partial_{x_2}f(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1$$

とおく．積分の順序交換を用いると

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x_2}G(s)\,\mathrm{d}s&=\int_{-\infty}^{x_2}\left(\int_{\mathbb{R}}\partial_s f(y_1,s)\,\mathrm{d}y_1\right)\mathrm{d}s\\
&=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{x_2}\partial_s f(y_1,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y_1\\
&=\int_{\mathbb{R}}\left[f(y_1,s)\right]_{s=-\infty}^{x_2}\,\mathrm{d}y_1\\
&=\int_{\mathbb{R}}f(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1.\quad(\because\ f\text{ は }|x|>1\text{ で消える})
\end{aligned}$$

したがって，微積分の基本定理より

$$\underbrace{G(x_2)}_{\text{連続}}=\partial_{x_2}\left(\int_{\mathbb{R}}f(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1\right).$$

ゆえに，$x_2\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1$ は C^1 級だから，

$$g_1(x)=\underbrace{h(x_1)}_{x_1\text{に関して}C^1}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}}f(y_1,x_2)\,\mathrm{d}y_1\right)}_{x_2\text{に関して}C^1}:\ C^1\text{級}.$$

また，$|x_1|\geqq 1$，$|x_2|>1$ で $h=f=0$ であるから，$g_1(x)=0$ $(|x|>1)$．

(2)

$$F_1(x):=\int_{-\infty}^{x_1}(g_0-g_1)(y,x_2)\,\mathrm{d}y,\quad F_2(x):=\int_{-\infty}^{x_2}(g_1-g_2)(x_1,y)\,\mathrm{d}y$$

に対して，微積分の基本定理より

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}F_1(x)&=(g_0-g_1)(x_1,x_2)\quad\cdots①\\
\partial_{x_2}F_2(x)&=(g_1-g_2)(x_1,x_2)\quad\cdots②.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{F}(x) := (F_1(x), F_2(x))$ とおくと，$F_1(x)$, $F_2(x)$ が C^1 級だから，$\boldsymbol{F}(x)$ も C^1 級であり，①＋②より

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{F}(x) &= \partial_{x_1}F_1(x) + \partial_{x_2}F_2(x) \\
&= (g_0 - g_1)(x_1, x_2) + (g_1 - g_2)(x_1, x_2) \\
&= g_0(x_1, x_2) - g_2(x_1, x_2) \\
&= f(x_1, x_2) \quad (\because\ g_0 = f,\ g_2 = 0)
\end{aligned}
$$

となって，1つ目の主張に逢着する．

次に，$x_1 > 1$ ならば

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x_1} g_1(y, x_2)\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{x_1} h(y)\int_{\mathbb{R}} f(s, x_2)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{x_1} h(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(s, x_2)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,\mathrm{d}y\right)}_{=1}\left(\int_{-\infty}^{x_1} f(s, x_2)\,\mathrm{d}s\right) \\
&\qquad (\because\ x_1 > 1 \text{ より } h(y) = 0\ (y \geqq x_1),\ f(s, x_2) = 0\ (s \geqq x_1)) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} f(s, x_2)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{x_1} f(y, x_2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} g_0(y, x_2)\,\mathrm{d}y \\
\iff \int_{-\infty}^{x_1} (g_0 - g_1)(y, x_2)\,\mathrm{d}y = 0 &\iff F_1(x) = 0.
\end{aligned}
$$

同様に，$x_2 > 1$ ならば

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x_2} g_2(x_1, y)\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{x_2}\left(h(x_1)h(y)\iint_{\mathbb{R}^2} f(s, t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{x_2} h(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)f(s, t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right) \\
&= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,\mathrm{d}y\right)}_{=1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(h(x_1)\int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)\,\mathrm{d}s\right)}_{=g_1(x_1, t)}\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad (\because\ x_2 > 1 \text{ より } h(y) = 0\ (y \geqq x_2)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1, t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x_2} g_1(x_1, t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad (\because\ x_2 > 1 \text{ より } g_1 = 0\ (t \geqq x_2)) \\
&= \int_{-\infty}^{x_2} g_1(x_1, y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\iff \int_{-\infty}^{x_2} (g_1 - g_2)(x_1, y)\,\mathrm{d}y = 0 \iff F_2(x) = 0.
$$

ゆえに，$x_i > 1\ \ (i = 1, 2) \implies \boldsymbol{F}(x) = 0.$ ∎