§11 積分の順序交換　演習問題２　解答

✎ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★★)(順序交換を用いた等式の証明)

次の各問いに答えよ．

(1) 実数 $y > 1$ を定数とみて，定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{y - \cos x}$ を計算せよ．

✓**HINT.** 変数変換 $\tan \frac{x}{2} = t$ を考える．

(2) $1 < a < b$ のとき，

$$\int_0^\pi \log\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx = \pi \log\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)$$

であることを積分の順序交換を用いることにより求めよ．

✓**HINT.** 長方形領域 $D = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq \pi, a \leqq y \leqq b\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y - \cos x}\, dxdy$ を計算する．

解 (1) $\tan \frac{x}{2} = t$ の変数変換を考えると，

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

であり，$\displaystyle\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1 + t^2}{2}$，$x : 0 \to \pi \quad \longleftrightarrow \quad t : 0 \to +\infty$ だから，

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{dx}{y - \cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{y - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)y - (1 - t^2)}\, dt \\
&= \frac{2}{y + 1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right)^2} \\
&= \frac{2}{y + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}} \left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{y - 1}{y + 1}}\, t\right)\right]_{t=0}^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\sqrt{y^2 - 1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}}}
\end{aligned}$$

(2) 長方形領域 $D = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq \pi, a \leqq y \leqq b\}$ 上で $f(x, y) := \dfrac{1}{y - \cos x}$ は連続である．

まず D を縦線領域とみて x 変数から先に積分する．(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \left(\int_0^\pi \frac{1}{y-\cos x}\,dx \right) dy \\
&\overset{(1)}{=} \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\,dy \\
&= \pi \int_a^b \log(y+\sqrt{y^2-1})'\,dy \\
&= \Big[\pi \log(y+\sqrt{y^2-1}) \Big]_{y=a}^b = \pi \log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \right) \quad \cdots ①.
\end{aligned}$$

一方，D を横線領域をみなして，y 変数から先に積分すると

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_a^b \frac{1}{y-\cos x}\,dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi \Big[\log(y-\cos x) \Big]_{y=a}^b dx \\
&= \int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x} \right) dx \quad \cdots ②.
\end{aligned}$$

したがって，①,②より所望の等式

$$\int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x} \right) dx = \pi \log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \right)$$

を得る． ∎

Check

$\cosh x := \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\quad \sinh x := \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおく（これらは双曲線関数とよばれる）．簡単な計算により

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (\cosh^{-1} x)', \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (\sinh^{-1} x)'$$

が確かめられる．逆双曲線関数 $\cosh^{-1} x$，$\sinh^{-1} x$ の値がそれぞれ $\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ と求まることから一般に次の公式が成り立つ：

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \log\left(x+\sqrt{x^2\pm 1}\right)}$$

また上の公式は変数変換 $s = x+\sqrt{x^2\pm 1}$ によって直接求めることもできる．[a]

[a] この変数変換 $s = x+\sqrt{x^2\pm 1}$ 自体が元々は双曲線 $x^2-y^2=\pm 1$ に沿うパラメータから起因するものである．

$\boxed{2}$ (★★★)(積分記号下の微分)

$f(x,y)$ は長方形領域 $D := \{(x,y) \,:\, a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ 上で偏微分可能で，偏導関数 $f_y(x,y)$ は D 上連続であるとする．このとき，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f_y(x,y)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

解 $f_y(x,y)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続だから，特に積分可能である．$G(y) := \displaystyle\int_a^b f_y(x,y)\,dx$ とおく．$y \in (c,d)$ を任意に 1 つとって固定する．$G(t)$ は t の関数として $c \leqq t \leqq y$ で連続だから，積分の順序交換を用いると

$$\begin{aligned}\int_a^y G(t)\,dt &= \int_c^y \left(\int_a^b f_t(x,t)\,dx\right)dt \\ &= \int_a^b \left(\int_c^y f_t(x,t)\,dt\right)dx \\ &= \int_a^b \big[f(x,t)\big]_{t=c}^{y}\,dx \\ &= \int_a^b f(x,y)\,dx - \underbrace{\int_a^b f(x,c)\,dx}_{\text{定数}}\end{aligned}$$

ゆえに両辺を y で微分して，微積分の基本定理を左辺に適用すると

$$G(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx$$

となって証明終わり． ■

$\boxed{3}$ (★★★)(e^{-x^2} の広義積分の計算)

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

とおく．次の各問いに答えよ．

(1) $\boxed{2}$ の積分記号下での微分を用いて，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ を求めよ．

✓**HINT.** 非積分関数を $f(t,x) := \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ とおく．長方形領域 $\{(t,x) \,:\, 0 \leqq t \leqq 1, -R \leqq x \leqq R\}$（ただし $R > 0$ は十分大きな任意の正数）で偏導関数 $f_x(t,x)$ が連続であることを確かめた後，積分記号下での微分を用いて計算を実行する．

(2) $F'(x)=0$ を示せ.

(3) $F(x)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$ であることを示せ.

解 (1) $f(t,x) := \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ とおく．$R>0$ は十分大きな任意の正数として，長方形領域 $\{(t,x):0 \leqq t \leqq 1, -R \leqq x \leqq R\}$ 上で偏導関数 $f_x(t,x)$ が連続であることを確かめよう．実際，

$$f_x(t,x)=\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\cdot(-2x(1+t^2))=-2xe^{-x^2(1+t^2)} \quad \cdots ①$$

は任意の $t \in [0,1]$ および任意の $x \in [-R,R]$ に対して連続である（$\because$ x および $e^{-x^2(1+t^2)}$ はそれぞれ連続だからその積もまた連続）．ゆえに，①および $\boxed{\mathbf{2}}$ の積分記号下での微分定理を適用するとすべての $x \in (-R,R)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt &= \frac{d}{dx}\int_0^1 f(t,x)\,dt\\ &= \int_0^1 f_x(t,x)\,dt\\ &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt\end{aligned}$$

が成り立つ．$R>0$ は任意だったから，結局すべての実数 x に対して

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \boldsymbol{-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt}.$$

(2) $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2+\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ より (1) の結果および微積分の基本定理を用いると，

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt\\ &= 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\cdot e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt \quad \cdots ②.\end{aligned}$$

第 2 項の積分において，$xt=s$ と変数変換すると，$t:0\to 1 \longleftrightarrow s:0\to x$，$dt=\frac{ds}{x}$ ゆえ

$$\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt=\int_0^x e^{-s^2}\frac{ds}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-s^2}\,ds \quad \cdots ③.$$

③を②へ代入して

$$F'(x)=2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\cdot e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x e^{-s^2}\,ds=0$$

が従う．(3) (2) より $F(x)=C$（C: 定数）とおける．したがって

$$C=F(0)=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\left[\operatorname{Arctan} t\right]_{t=0}^1=\frac{\pi}{4}.$$

すなわち，

$$\boldsymbol{F(x)=\frac{\pi}{4}}.$$

(4) (3) の結果よりすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} \quad \cdots ④$$

今，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $e^{-x^2(1+t^2)} \leqq e^{-x^2}$ であるから，$x \to +\infty$ のとき

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} \to 0$$

すなわち，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = 0 \quad \cdots ⑤.$$

したがって，④で $x \to +\infty$ の極限へ移行して⑤を用いると

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

よって e^{-t^2} の非負値性より $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqq 0$ であるから，

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \cdots ⑥.$$

さらに，関数 $t \mapsto e^{-t^2}$ は偶関数であるので，⑥から

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^x e^{-t^2}\,dt = 2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

となり，証明が完了した． ∎

4 (★★★)(積分の順序交換)

$f(t)$ を閉区間 $[0,T]$ 上で連続とする．次の問いに答えよ．

(1) 積分の順序を入れ替えることにより，

$$\int_0^T\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx = \int_0^T (T-t)f(t)\,dt$$

を示せ．

(2) (1) を用いて，等式

$$\int_0^T \left[\int_0^x \left(\int_0^y f(t)\,dt\right)\,dy\right]\,dx = \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)^2 f(t)\,dt$$

を示せ．

解 (1) $\Omega := \{(x,t) : 0 \leqq x \leqq T,\ 0 \leqq t \leqq x\}$ とおく．Ω は縦線領域であり，これを横線領域とみなすと

$$\Omega = \{(x,t) : 0 \leqq t \leqq T,\ t \leqq x \leqq T\}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\,dx = \iint_\Omega f(t)\,dtdx &= \int_0^T \left(\int_t^T f(t)\,dx\right)\,dt \\
&= \int_0^T \big[xf(t)\big]_{x=t}^T\,dt \\
&= \int_0^T (T-t)f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

(2) $g(y) := \displaystyle\int_0^y f(t)\,dt$ とおくと，微積分の基本定理により $g(y)$ は $[0,T]$ で連続であり $g'(y) = f(y)$ かつ $g(0) = 0$．したがって (1) を用いると，

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left[\int_0^x \left(\int_0^y f(t)\,dt\right)\,dy\right]\,dx &= \int_0^T \left[\int_0^x g(y)\,dy\right]\,dx \\
&\overset{(1)}{=} \int_0^T (T-y)g(y)\,dy \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{2}(T-y)^2 g(y)\right]_{y=0}^T}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^T (T-y)^2 g'(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T (T-y)^2 f(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)^2 f(t)dt.
\end{aligned}$$

∎