§11 積分の順序交換 演習問題 1 解答*

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★☆☆)(積分の順序交換①)

次の積分の順序を交換せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{x^3} f(x,y)\,dy\right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} f(x,y)\,dy\right) dx$

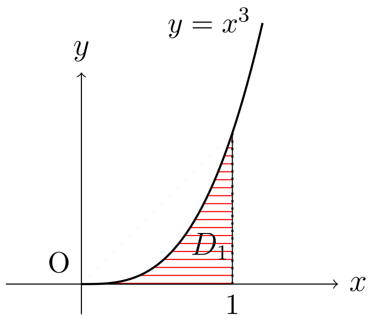
(3) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx$

解 (1) $D_1 := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^3\}$ とおく．D_1 は縦線領域である．

$0 \leqq y \leqq x^3 \cdots$① より $(0 \leqq)\, y^{1/3} \leqq x \cdots$②. ①,②と $0 \leqq x \leqq 1$ を合わせると $y^{1/3} \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$. ゆえに，D_1 は横線領域

$$D_1 = \left\{(x,y) : 0 \leqq y \leqq 1,\ y^{1/3} \leqq x \leqq 1\right\}$$

とみなせて

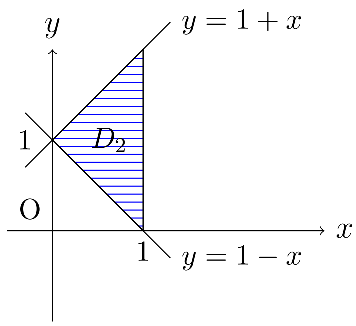


$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^3} f(x,y)\,dy\right) dx = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^{1/3}}^1 f(x,y)\,dx\right) dy.$$

(2) $D_2 := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 1-x \leqq y \leqq 1+x\}$ とおくと，D_2 は縦線領域である．右図より，D_2 は横線領域の和集合

$$D_2 = \{0 \leqq y \leqq 1,\ 1-y \leqq x \leqq 1\} \cup \{1 \leqq y \leqq 2,\ y-1 \leqq x \leqq 1\}$$

とみなせるので，

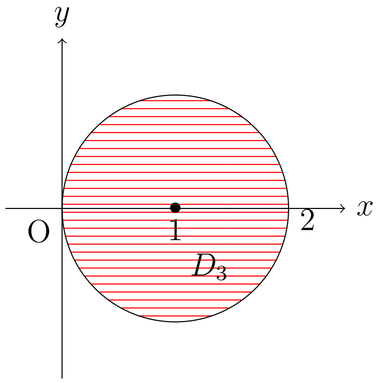


$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} f(x,y)\,dy\right) dx = \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 f(x,y)\,dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y-1}^1 f(x,y)\,dx\right) dy.$$

*2021.1.13 revised / ver.1.1

(3) $D_3 := \left\{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 2,\ -\sqrt{2x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2}\right\}$
とおく．D_3 は縦線領域である．$0 \leqq x \leqq 2$ のもとで

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2} \\ \iff & |y| \leqq \sqrt{1-(x-1)^2} \quad \cdots ① \\ \iff & (x-1)^2 \leqq 1-y^2 \\ \iff & 1-\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{1-y^2} \quad \cdots ② \end{aligned}$$



であるから，①より D_3 は中心 $(1,0)$ の半径 1 の円および周の内部を表す．また②より

$$D_3 = \left\{(x,y) : -1 \leqq y \leqq 1,\ 1-\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{1-y^2}\right\}$$

のように横線領域とみなせるから，

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx &= \iint_{D_3} f(x,y)\,dxdy \\ &= \boldsymbol{\int_{-1}^{1} \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy} \end{aligned}$$

∎

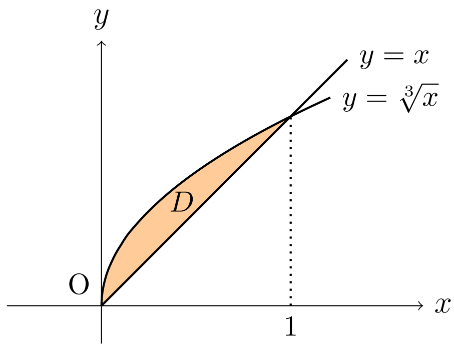
2 (★☆☆)(積分の順序交換②)

次の重積分を積分順序を交換することで求めよ．

(1) $\displaystyle \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2}\,dy \right) dx$

(2) $\displaystyle \int_0^{\pi} \left(\int_x^{\pi} \cos(y^2)\,dy \right) dx$

解 (1)　積分 $\int e^{y^2}\,dy$ は計算できないので，積分の順序交換を行う．与えられた積分領域を $D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt[3]{x}\}$ とおく．これを $D = \{(x,y) : 0 \leqq y \leqq 1,\ y^3 \leqq x \leqq y\}$ のように横線領域とみなすと，



$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2}\,dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_{y^3}^{y} e^{y^2}\,dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[xe^{y^2} \right]_{x=y^3}^{y} dy \quad \cdots ①. \end{aligned}$$

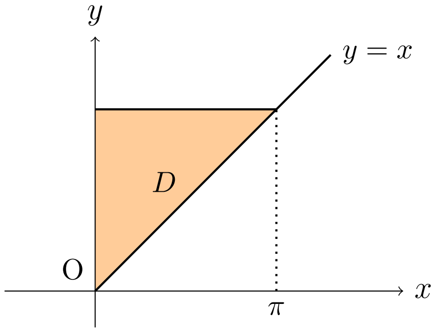
ここで，$\displaystyle\int_0^1 ye^{y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\cdots$②であり，

$$\begin{aligned}\int_0^1 y^3e^{y^2}\,dy &= \int_0^1 y^2\cdot ye^{y^2}\,dy\\ &= \left[\frac{1}{2}y^2e^{y^2}\right]_0^1 - \int_0^1 ye^{y^2}\,dy = \frac{e}{2}-\frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}\cdots③\end{aligned}$$

であるから，①に②, ③を代入して，$\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2}\,dy\right)dx = \boldsymbol{\frac{e}{2}-1}.$

(2)　積分 $\int\cos(y^2)\,dy$ は初等的に計算できない[†]ので，積分の順序交換を行う．与えられた積分領域を $D=\{(x,y)\,:\,0\leqq x\leqq\pi,\ x\leqq y\leqq\pi\}$ とおく．これを $D=\{(x,y)\,:\,0\leqq y\leqq\pi,\ 0\leqq x\leqq y\}$ のように横線領域とみなすと，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\left(\int_x^\pi\cos(y^2)\,dy\right)dx &= \int_0^\pi\left(\int_0^y\cos(y^2)\,dx\right)dy\\ &= \int_0^\pi\left[x\cos(y^2)\right]_{x=0}^y\,dy\\ &= \int_0^\pi y\cos(y^2)\,dy\\ &= \left[\frac{1}{2}\sin(y^2)\right]_{y=0}^\pi = \boldsymbol{\frac{\sin(\pi^2)}{2}}.\end{aligned}$$



∎

[†] $\int_0^\infty\cos(y^2)\,dy$ や，$\int_0^\infty\sin(y^2)\,dy$ のことを**フレネル積分**という．フレネル積分は複素関数論の枠組みで求めることができる．実際，8 分の 1 円 C を積分経路として複素積分 $\int_C e^{-z^2}\,dz$ を計算することにより，フレネル積分はすぐに求められる．