§10 累次積分 演習問題2 解答*

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★☆☆)(累次積分①)

次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy, \quad D := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy, \quad D := \{(x,y) : 1 \leqq x \leqq 2,\ 3 \leqq y \leqq 4\}$

(3) $\displaystyle\iint_D e^x y\,dxdy, \quad D := \{(x,y) : 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$

(4) $\displaystyle\iint_D xe^y\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \sin y\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) : 0 \leqq x \leqq \pi,\ \frac{\pi}{2} - x \leqq y \leqq \pi + x\right\}$

(6) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) : x + y \leqq \frac{\pi}{2},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(7) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) : x^2 \leqq 8y,\ x \geqq y^2\right\}$

解 (1)

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_{x=0}^1 dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 = \mathbf{1}.$$

(2)

$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \left(\int_1^2 x^2\,dx\right)\left(\int_3^4 y\,dy\right)$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=3}^4 = \boldsymbol{\frac{49}{6}}.$$

(3)

$$\iint_D e^x y\,dxdy = \left(\int_1^2 e^x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right)$$
$$= [e^x]_{x=1}^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^2 = \boldsymbol{2(e^2 - e)}.$$

(4)

$$\iint_D xe^y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xe^y\,dy\right) dx = \int_0^1 x[e^y]_{y=0}^{x^2}\,dx$$

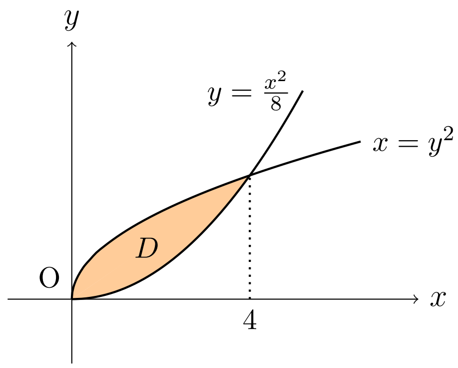
*2020.12.16 revised / ver.1.1

$$= \int_0^1 x(e^{x^2} - 1)\, dx = \left[\frac{1}{2}(e^{x^2} - x^2)\right]_{x=0}^1 = \frac{\boldsymbol{e-2}}{\mathbf{2}}.$$

(5)
$$\iint_D \sin y\, dxdy = \int_0^\pi \left(\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi+x} \sin y\, dy\right) dx = \int_0^\pi \big[-\cos y\big]_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{\pi+x} dx$$
$$= \int_0^\pi (\cos x + \sin x)\, dx$$
$$= \big[\sin x - \cos x\big]_0^\pi = \mathbf{2}.$$

(6) $D = \left\{(x, y) : 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} - x\right\}$ とも書けるので，
$$\iint_D \sin(x+y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y)\, dy\right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[-\cos(x+y)\big]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}-x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \mathbf{1}.$$

(7) D の定義式中の不等式 $x^2 \leqq 8y,\ x \geqq y^2$ を同時にみたす (x, y) が存在するための条件は，$0 \leqq \left(\frac{x^2}{8}\right)^2 \leqq x \iff 0 \leqq x \leqq 4$．ゆえに，領域 D は $D = \left\{(x, y) : 0 \leqq x \leqq 4,\ \frac{x^2}{8} \leqq y \leqq \sqrt{x}\right\}$ と縦線領域として表されるから，



$$\iint_D xy\, dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x^2}{8}}^{\sqrt{x}} xy\, dx\right) dx = \int_0^4 \left[\frac{x}{2}y^2\right]_{y=\frac{x^2}{8}}^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{128}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{768}\right]_0^4 = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}.$$

Check

【別解】D の定義式中の不等式 $x^2 \leqq 8y,\ x \geqq y^2$ を同時にみたす (x, y) が存在するための条件は，$0 \leqq y^4 \leqq 8y \iff 0 \leqq y \leqq 2$ である．したがって，領域 D を $D = \left\{(x, y) : 0 \leqq y \leqq 2,\ y^2 \leqq x \leqq \sqrt{8y}\right\}$ と横線領域とみなして
$$\iint_D xy\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{8y}} xy\, dx\right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{x=y^2}^{\sqrt{8y}} dy = \cdots = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$$
のように積分してもよい．

■

2 (★★☆)(累次積分②)

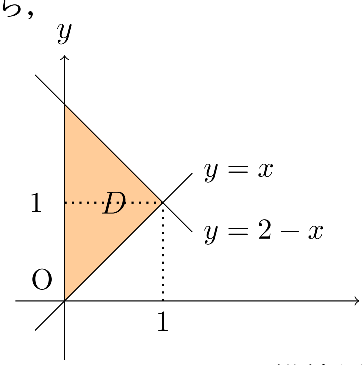
次の重積分の値を 2 通りに計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$， D は直線 $x=0$， $y=x$ および $x+y=2$ で囲まれた領域．

(2) $\displaystyle\iint_D x^3 dxdy$， D は直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域．

解 (1) $D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 2-x\}$ と表されるから，

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1\left(\int_x^{2-x} xy\,dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x}^{2-x}dx$$
$$=\int_0^1 (2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

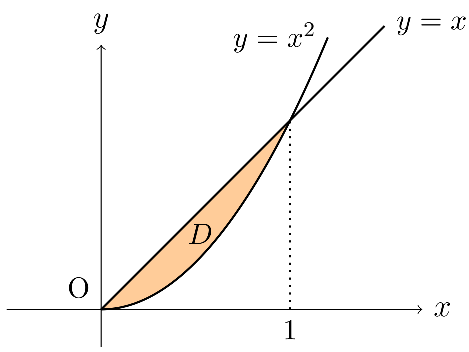


一方，$D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\}\cup\{(x,y)\ :\ 1\leqq y\leqq 2,\ 0\leqq x\leqq 2-y\}$ と横線領域の合併とみなすと，

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^y xy\,dx\right)dy+\int_1^2\left(\int_0^{2-y} xy\,dx\right)dy$$
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=0}^{y}dy+\int_1^2\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=0}^{2-y}dy$$
$$=\int_0^1\frac{y^3}{2}\,dy+\int_1^2\frac{1}{2}(2-y)^2y\,dy$$
$$=\left[\frac{y^4}{8}\right]_0^1+\left[\frac{(y-2)^4}{8}+\frac{(y-2)^3}{3}\right]_1^2=\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

(2) $D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq x\}$ と表されるから，

$$\iint_D x^3\,dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x} x^3\,dy\right)dx=\int_0^1\left[x^3y\right]_{y=x^2}^{x}dx$$
$$=\int_0^1(x^4-x^5)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{30}}.$$



一方，$D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq y\leqq 1,\ y\leqq x\leqq \sqrt{y}\}$ と横線領域とみなすと，

$$\iint_D x^3\,dxdy=\int_0^1\left(\int_y^{\sqrt{y}} x^3\,dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=y}^{\sqrt{y}}dy$$
$$=\int_0^1\frac{1}{4}(y^2-y^4)\,dy=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{30}}.$$

∎

3 (★★☆)(累次積分③)

次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy, \quad D:=\{(x,y):0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D:=\left\{(x,y):1\leqq y\leqq \sqrt{3},\ y\leqq x\leqq y^2\right\}$

解 (1)

$$\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}\,dy\right)dx \quad \cdots ①.$$

括弧内の y に関する積分で $y=2x\sin\theta$ と変数変換する．このとき，$y:0\to x \quad\longleftrightarrow\quad \theta:0\to\frac{\pi}{6}$ であり，$dy=2x\cos\theta d\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{4x^2-y^2}\,dy&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2x\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot 2x\cos\theta d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4x^2\cos^2\theta\,d\theta\\&=4x^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\&=4x^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=4x^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).\end{aligned}$$

したがって，これを①へ代入して，

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy&=\int_0^1 4x^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)dx\\&=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}}.\end{aligned}$$

(2)

$$\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}\,dxdy=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_y^{y^2}\frac{2y}{x^2+y^2}\,dx\right)dy \quad\cdots ①.$$

括弧内の x に関する積分は，

$$\begin{aligned}\int_y^{y^2}\frac{2y}{x^2+y^2}\,dx&=\int_y^{y^2}2\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y}\right)'dx\\&=\left[2\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y}\right]_{x=y}^{y^2}=2\left(\mathrm{Arctan}\,y-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

となる．したがって，①へ代入して部分積分すると，

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}\,dxdy&=\int_1^{\sqrt{3}}2\left(\mathrm{Arctan}\,y-\frac{\pi}{4}\right)dy\\&=2\int_1^{\sqrt{3}}y'\,\mathrm{Arctan}\,y\,dy-\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\, 2y \operatorname{Arctan} y \,\Big]_{y=1}^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2y}{y^2+1}\, dy - \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{\pi}{2} - \Big[\, \log(y^2+1) \Big]_{y=1}^{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \log 2}.
\end{aligned}
$$

∎

問題を解くにあたっての基礎事項の確認

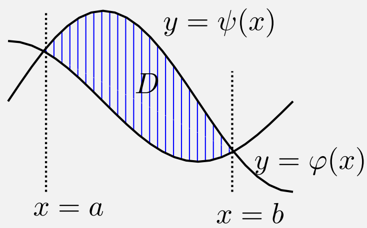
(1)　$\varphi(x), \psi(x)$: $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ をみたす $x \in [a, b]$ 上の連続関数とする．領域

$$
D := \{(x, y) \,:\, a \leqq x \leqq b,\ \ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}
$$

を**縦線領域**という．このとき連続関数 $f(x, y)$ に対して

$$
\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx
$$

が成り立つ．



(2)　$p(y), q(y)$: $p(y) \leqq q(y)$ をみたす $x \in [c, d]$ 上の連続関数とする．領域

$$
E := \{(x, y) \,:\, c \leqq y \leqq d,\ \ p(y) \leqq x \leqq q(y)\}
$$

を**横線領域**という．このとき連続関数 $f(x, y)$ に対して

$$
\iint_E f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx \right) dy
$$

が成り立つ．