多変数関数の極限と連続性　問題１　解答

$\boxed{1}$ (i)　$f(x,y) = y/\sqrt{x^2+y^2}$ とおく．$x \to 0$ のとき，$(x,0) \to (0,0)$ であるが，$f(x,0) = 0 \to 0\,(x \to 0)$．また，$y \to +0$ のとき $(0,y) \to (0,0)$ であるが，

$$f(0,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \frac{y}{|y|} \to 1 \quad (y \to +0).$$

したがって (x,y) の $(0,0)$ への近づけ方によって $f(x,y)$ は異なる値に近づくので，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．■

注意． $\sqrt{y^2} = |y|$ となることに注意．例えば $\sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt{(-1)^2} = 1 = |(-1)|$ である．

(ii)　$g(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ とおく．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とすると $(x,y) \to (0,0)$ のとき $r \to 0$ であって，θ がどんな振る舞いをしても

$$|g(x,y)| = \left|\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}\right| = |r\cos\theta\sin\theta| \le r \to 0 \quad (r \to 0)$$

だとわかる．したがって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.　■

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ (ii) の結果より，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$．一方，定義より $f(0,0) = 1$．したがって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$ となるから，関数 $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない．■

$\boxed{3}$ (i)

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

■

(ii)

$$\begin{aligned} z_x &= ye^{xy}\cos x + e^{xy}(-\sin x) = e^{xy}(y\cos x - \sin x), \\ z_y &= xe^{xy}\cos x. \end{aligned}$$

■

復習.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{0.1}$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x). \tag{0.2}$$

例えば上記 2 つだけ覚えておけば，(0.2) において $g(x) = 1/x$ として

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

が得られる．さらに $f(x)/g(x) = f(x)\cdot(1/g(x))$ だと思って

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

が得られる．