§9 微分積分学の基本定理と不定積分　演習問題 2

✐ 問題の難易度の目安　【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

$\boxed{\mathbf{1}}$ (★★★)　$x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は $x > -1$ で 2 回微分可能であり，すべての $x > -1$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

をみたしているとする．このとき，$f(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (★★★)　$x > 0$ に対し，$f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ とおく．すべての非負整数 n に対して

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．ここに，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 階導関数を表す．また，これを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(1)$ を求めよ．