§9 微分積分学の基本定理と不定積分　演習問題 1

✐ **問題の難易度の目安　【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★**

$\boxed{\mathbf{1}}$ (★☆☆)　以下の各問いに答えよ.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\, dt$ を微分せよ.

(2) $G(x) = \displaystyle\int_0^x x\cos t\, dt$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = x\sin x$ をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (★☆☆)　以下の各問いに答えよ.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^t\, dt$ を微分せよ.

(2) $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{x+t}\, dt$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = xe^x$ をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (★☆☆)　以下の各問いに答えよ.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\, dt$ を微分せよ.

(2) $G(x) = \displaystyle\int_1^x x\log t\, dt$ を微分せよ. 必要ならば $(x\log x - x)' = \log x$ を用いてよい.

(3) $\displaystyle\int_1^x f(t)\, dt = x\log x$ をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (★☆☆)　次の等式をみたす定数 a と連続関数 $f(x)$ を求めよ.

$$\int_a^x f(t)\, dt = (\log x)^2 + 4\log x - 12.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (★★☆)　以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ をある区間 I 上の連続関数とする．$F(x) := \displaystyle\int_x^a f(t)\,dt$ とおくとき，$F'(x) = -f(x)$ となることを示せ．

(2) $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$ はすべての実数 x で微分可能であることを示し，導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(3) $h(x)$ をある区間 I 上の連続関数とし，$\varphi(x), \psi(x) \in I$ は微分可能な関数とする．このとき $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h(t)\,dt\right)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (★★☆)　$f(x)$ を連続関数とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^{2x+1} f(2t)\,dt$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-2x}^{x} tf(t^2)\,dt$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (★★☆)　$(-\infty, \infty)$ 上微分可能で，導関数も連続であるような関数[*1] $f(x)$ が，任意の $x \in (-\infty, \infty)$ に対して，

$$f(x) = e^{-x} - \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

をみたしているとき，$f(x)$ を求めよ．

[*1] このような関数 $f(x)$ のことを $(-\infty, \infty)$ 上の C^1 **級関数**という．