§9　微分積分学の基本定理と不定積分　演習問題 2　解答

✐ **問題の難易度の目安　【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★**

$\boxed{1}$ (★★★)　$x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は $x > -1$ で 2 回微分可能であり，すべての $x > -1$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

をみたしているとする．このとき，$f(x)$ を求めよ．

解答. $\sin(x-t) = \sin x\cos t - \cos x\sin t$ であるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} + \int_0^x f(t)\left(\sin x\cos t - \cos x\sin t\right)\,dt \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} + \sin x\left(\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right) - \cos x\left(\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right) \quad \cdots ①. \end{aligned}$$

$f(t)$ は $t > -1$ で微分可能であるから，特に連続．ゆえに $f(t)\cos t$, $f(t)\sin t$ も連続だから，微分積分学の基本定理を用いれば，①より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{(x+1)^3} + \cos x\left(\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right) + \sin x\cdot f(x)\cos x \\ &\quad + \sin x\left(\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right) - \cos x\cdot f(x)\sin x \\ &= \frac{-2}{(x+1)^3} + \cos x\left(\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right) + \sin x\left(\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right) \quad \cdots ②. \end{aligned}$$

再び両辺を x で微分して，微分積分学の基本定理および①を用いると，

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6}{(x+1)^4} - \sin x\left(\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right) + \cos x\cdot f(x)\cos x \\ &\quad + \cos x\left(\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right) + \sin x\cdot f(x)\sin x \\ &= \frac{6}{(x+1)^4} - \sin x\left(\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right) + \cos x\left(\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right) + f(x) \\ &\overset{①}{=} \frac{6}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int\left(\frac{6}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx + C_1 \\ &= \frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{-1}{x+1} + C_1 \quad \cdots ③ \quad (C_1 : \text{積分定数}). \end{aligned}$$

ここで，②で $x=0$ とすると $f'(0) = -2$ だから，③で $x=0$ として，

$$-2 = f'(0) = -2 - 1 + C_1 \quad \therefore C_1 = 1.$$

ゆえに，$f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} + \dfrac{-1}{x+1} + 1$ であるので，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{-1}{x+1} + 1 \right) dx + C_2 \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} - \log|x+1| + x + C_2 \quad \cdots ④ \quad (C_2 : \text{積分定数}). \end{aligned}$$

ここで，①で $x=0$ とすると $f(0)=1$ だから，④で $x=0$ として，

$$1 = f(0) = 1 - 0 + 0 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0.$$

以上より，$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \log(x+1) + x \quad (x > -1)}$.

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (★★★)　$x>0$ に対し，$f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ とおく．すべての非負整数 n に対して

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．ここに，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 階導関数を表す．また，これを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(1)$ を求めよ．

解答.

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt \cdots (*)$$

であることを $n \geqq 0$ に関する数学的帰納法で証明する．

・$n=0$ のとき

$$\frac{1}{x}\int_0^x t^0 \cos\left(t + \frac{0\cdot\pi}{2}\right) dt = \frac{1}{x}\big[\sin t\big]_{t=0}^{x} = \frac{\sin x}{x} = f^{(0)}(x)$$

ゆえ，$(*)$ は $n=0$ のとき成り立つ．

・ある n で $(*)$ が成り立つと仮定する．このとき $(*)$ の両辺を x で微分すれば，微分積分学の基本定理を用いて

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left\{ \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt \right\} \\ &= -(n+1)\frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt + \frac{1}{x^{n+1}} \cdot x^n \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -(n+1)\frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt + \frac{1}{x^{n+2}} \cdot x^{n+1} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -(n+1)\frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt + \frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x \left(t^{n+1} \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) \right)' dt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\left(t^{n+1}\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\right)' = (n+1)t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right) + t^{n+1}\left\{-\sin\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= (n+1)t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right) + t^{n+1}\cos\left(t+\frac{n+1}{2}\pi\right) \quad \cdots ②$$

だから，②を①へ代入すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \cancel{-(n+1)\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)dt} \\ &\quad \cancel{+(n+1)\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)dt} + \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}\cos\left(t+\frac{n+1}{2}\pi\right)dt \\ &= \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}\cos\left(t+\frac{n+1}{2}\pi\right)dt \end{aligned}$$

となり，$n+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．以上よりすべての $n \geqq 0$ に対して $(*)$ が成り立つことが示された．また，この結果より

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(1)\right| &\leqq \int_0^1 \left|t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\right|dt \\ &\leqq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

だから，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(1) = 0}$. ∎