§9　微分積分学の基本定理と不定積分　演習問題１　解答

✐ 問題の難易度の目安　【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)　以下の各問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ を微分せよ．

(2) $G(x) = \displaystyle\int_0^x x\cos t\,dt$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x\sin x$ をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

解答. (1)　微分積分学の基本定理により $\boldsymbol{F'(x) = \cos x}$.

(2)　微分積分学の基本定理を用いて，

$$\boldsymbol{F'(x)} = \left(x\int_0^x \cos t\,dt\right)'$$

積分変数が t の場合，t 以外の文字は定数とみなす．

$$= (x)'\int_0^x \cos t\,dt + x\left(\int_0^x \cos t\,dt\right)'$$

$$= \int_0^x \cos t\,dt + x\cos x \quad (\because (1))$$

$$= \Big[\sin t\Big]_{t=0}^{x} + x\cos x$$

$$= \boldsymbol{\sin x + x\cos x}.$$

(3)　与式 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x\sin x$ の両辺を x で微分すると，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = (x\sin x)' \quad \cdots ①$.
ここで左辺に微分積分学の基本定理を適用すると，①より

$$\boldsymbol{f(x)} = (x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)'$$

$$= \boldsymbol{\sin x + x\cos x}.$$

∎

$\boxed{2}$ (★☆☆)　以下の各問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^t\,dt$ を微分せよ．

(2) $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{x+t}\,dt$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = xe^x$ をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

解答. (1) 微分積分学の基本定理により $\boldsymbol{F'(x) = e^x}$.

(2) 指数法則 $e^{x+t} = e^x e^t$ および微分積分学の基本定理を用いて，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F'(x)} &= \left(e^x \int_0^x e^t\,dt\right)' \\
&= (e^x)' \int_0^x e^t\,dt + e^x \left(\int_0^x e^t\,dt\right)' \\
&= e^x \int_0^x e^t\,dt + e^x \cdot e^x \quad (\because (1)) \\
&= e^x \left[e^t\right]_{t=0}^{x} + e^{2x} \\
&= e^x(e^x - 1) + e^{2x} \\
&= \boldsymbol{2e^{2x} - e^x}.
\end{aligned}$$

積分変数が t の場合，t 以外の文字は定数とみなす．

(3) 与式 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = xe^x$ の両辺を x で微分すると，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = (xe^x)' \quad \cdots$②．ここで左辺に微分積分学の基本定理を適用すると，②より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f(x)} &= (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' \\
&= \boldsymbol{e^x(x+1)}.
\end{aligned}$$

∎

3 (★☆☆) 以下の各問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ を微分せよ．

(2) $G(x) = \displaystyle\int_1^x x\log t\,dt$ を微分せよ．必要ならば $(x\log x - x)' = \log x$ を用いてよい．

(3) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x\log x$ をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

解答. (1) 微分積分学の基本定理により $\boldsymbol{F'(x) = \log x}$.

(2) 微分積分学の基本定理を用いて，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F'(x)} &= \left(x \int_0^x \log t\,dt\right)' \\
&= (x)' \int_1^x \log t\,dt + x\left(\int_1^x \log t\,dt\right)' \\
&= \int_1^x \log t\,dt + x\log x \quad (\because (1))
\end{aligned}$$

積分変数が t の場合，t 以外の文字は定数とみなす．

$$= \int_1^x (t\log t - t)'\,dt + x\log x \quad (\because (1))$$

$$= \Big[t\log t - t\Big]_{t=1}^{x} + x\log x$$

$$= x\log x - x + 1 + x\log x$$

$$= \boldsymbol{2x\log x - x + 1}.$$

(3)　与式 $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x\log x$ の両辺を x で微分すると，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt = (x\log x)' \quad \cdots ②$.
ここで左辺に微分積分学の基本定理を適用すると，②より

$$\boldsymbol{f(x)} = (x\log x)' = (x)'\log x + x(\log x)'$$
$$= \boldsymbol{\log x + 1}.$$

∎

4 (★☆☆)　次の等式をみたす定数 a と連続関数 $f(x)$ を求めよ．

$$\int_a^x f(t)\,dt = (\log x)^2 + 4\log x - 12.$$

解答. 与式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = (\log x)^2 + 4\log x - 12 \quad \cdots ①$ の両辺に $x = a$ を代入すると，

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = (\log a)^2 + 4\log a - 12.$$

ゆえに，$(\log a + 6)(\log a - 2) = 0$ を解いて $\log a = -6,\ 2$. $\therefore \boldsymbol{a = e^{-6},\ e^{2}}$.

次に，①の両辺を x で微分すれば，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \left\{(\log x)^2 + 4\log x - 12\right\}' \cdots ②$ を得る．
②の左辺に微分積分学の基本定理を適用して，

$$\boldsymbol{f(x)} = \left\{(\log x)^2 + 4\log x - 12\right\}'$$

$$= 2\log x\,(\log x)' + 4(\log x)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\log x}{x} + \frac{4}{x}}.$$

∎

5 (★★☆)　以下の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ をある区間 I 上の連続関数とする．$F(x) := \displaystyle\int_x^a f(t)\,dt$ とおくとき，$F'(x) = -f(x)$ となることを示せ．

(2) $g(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$ はすべての実数 x で微分可能であることを示し，導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(3) $h(x)$ をある区間 I 上の連続関数とし，$\varphi(x),\psi(x)\in I$ は微分可能な関数とする．このとき $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}h(t)\,dt\right)$ を求めよ．

解答. (1)　$F(x)=-\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ だから，微分積分学の基本定理により $\boldsymbol{F'(x)=-f(x)}$.

(2)　$G(x):=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$ とおくと，$g(x)=G(x^2)$ と書ける．すなわち $g(x)$ は x^2 と $G(x)$ の合成関数である．$\frac{1}{1+\sin^2 x}$ は連続関数であるから，微分積分学の基本定理により $G(x)$ は微分可能で $G'(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}$．ゆえに $g(x)=G(x^2)$ は微分可能であり，合成関数の微分則を用いれば

$$g'(x)=G'(x^2)\cdot(x^2)'=\boldsymbol{\frac{2x}{1+\sin^2(x^2)}}.$$

(3)　$y=\psi(x),\ z=\varphi(x)$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=\psi'(x),\ \dfrac{dz}{dx}=\varphi'(x)\ \cdots$①．$a$ を定数として，

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}h(t)\,dt=\int_z^a h(t)\,dt+\int_a^y h(t)\,dt\quad\cdots②$$

分解する．合成関数の微分則と微積分の基本定理および①から，

$$\frac{d}{dx}\int_a^y h(t)\,dt=\frac{d}{dy}\int_a^y h(t)\,dt\cdot\frac{dy}{dx}=h(y)\psi'(x)=h(\psi(x))\psi'(x)\quad\cdots③.$$

同様に，(1) の結果も用いれば

$$\frac{d}{dx}\int_z^a h(t)\,dt=\frac{d}{dy}\int_z^a h(t)\,dt\cdot\frac{dz}{dx}=-h(z)\varphi'(x)=-h(\varphi(x))\varphi'(x)\quad\cdots④.$$

以上，②,③,④より

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}h(t)\,dt\right)=h(\psi(x))\psi'(x)-h(\varphi(x))\varphi'(x).}$$

∎

$\boxed{6}$ (★★☆)　$f(x)$ を連続関数とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x}^{2x+1}f(2t)\,dt$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-2x}^{x}tf(t^2)\,dt$ を求めよ．

解答. (1) 微分積分学の定理から導かれる $\boxed{5}$ –(3) を用いて，$g(t):=f(2t)$ とおくと $g(t)$ も明らかに連続であり

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{2x+1}f(2t)\,dt=\frac{d}{dx}\int_{-x}^{2x+1}g(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= g(2x+1)(2x+1)' - g(-x)(-x)' \\
&= 2g(2x+1) + g(-x) \\
&\overset{g(t)=f(2t)}{=} \boldsymbol{2f(4x+2)+f(-2x)}.
\end{aligned}
$$

(2) 同様に $\boxed{\mathbf{5}}$ –(3) を用いて，$h(t) := tf(t^2)$ とおくと $h(t)$ も明らかに連続であり

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{-2x}^{x} tf(t^2)\,dt &= \frac{d}{dx}\int_{-2x}^{x} h(t)\,dt \\
&= h(x)x' - h(-2x)(-2x)' \\
&= h(x) + 2h(-2x) \\
&\overset{h(t)=tf(t^2)}{=} \boldsymbol{xf(x^2) - 4xf(4x^2)}.
\end{aligned}
$$

注意. 上の解答のように，直接微分積分学の基本定理を用いて求めることができるが，§11 置換積分・不定積分にあるように，置換積分を経由しても次のように求めることができる.

【別解】 (1) $s = 2t$ と置換すると，$ds = 2dt$, $t : -x \to 2x+1$ のとき $s : -2x \to 4x+2$ だから,

$$
\int_{-x}^{2x+1} f(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2x}^{4x+2} f(s)\,ds.
$$

したがって $\boxed{\mathbf{5}}$ –(3) を用いると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{-x}^{2x+1} f(2t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\int_{-2x}^{4x+2} f(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{f(4x+2)(4x+2)' - f(-2x)(-2x)'\Big\} \\
&= \boldsymbol{2f(4x+2)+f(-2x)}.
\end{aligned}
$$

(2) $s = t^2$ と置換すると，$ds = 2tdt$, $t : -2x \to x$ のとき $s : 4x^2 \to x^2$ だから,

$$
\int_{-2x}^{x} tf(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_{4x^2}^{x^2} f(s)\,ds.
$$

同様に $\boxed{\mathbf{5}}$ –(3) を用いると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{-2x}^{x} tf(t^2)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\int_{4x^2}^{x^2} f(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{f(x^2)(x^2)' - f(4x^2)(4x^2)'\Big\} \\
&= \boldsymbol{xf(x^2) - 4xf(4x^2)}.
\end{aligned}
$$

∎

$\boxed{\mathbf{7}}$ (★★☆)　$(-\infty,\infty)$ 上微分可能で，導関数も連続であるような関数[*1] $f(x)$ が，任意の $x\in(-\infty,\infty)$ に対して，

$$f(x)=e^{-x}-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

をみたしているとき，$f(x)$ を求めよ．

解答. $\displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt = x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt$ だから，微分積分学の基本定理により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt &= \int_0^x f'(t)\,dt + xf'(x)-xf'(x)\\ &= \int_0^x f'(t)\,dt = f(x)-f(0)\quad\cdots①.\end{aligned}$$

与式 $f(x)=e^{-x}-\displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt\cdots$② において $x=0$ とすると $f(0)=1\cdots$③．与式②の両辺を x で微分し，②,③を考慮すると

$$\begin{aligned}&f'(x)=-e^{-x}-(f(x)-1)=1-e^{-x}-f(x)\\ \Longleftrightarrow\ &(e^x f(x))'=e^x-1.\end{aligned}$$

ゆえに，$e^xf(x)=e^x-x+C$ (C : 積分定数)．この式で $x=0$ として $f(0)=1$ を用いると $C=0$．したがって $e^xf(x)=e^x-x$，すなわち $\boldsymbol{f(x)=1-xe^{-x}}$. ∎