§8 積分の定義と基本性質　演習問題2　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(周期関数に対する積分の性質)

関数 $f=f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が T-**周期** $(T\in\mathbb{R},\,T\neq 0)$ であるとは，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(t+T)=f(t) \qquad (\star)$$

が成り立つことをいう．定義から，周期 T は一意ではない．実際，f が T-周期ならば任意の $n=1,2,\ldots$ に対して f は nT-周期でもある．$(\star)$ が成り立つような最小の T のことを**基本周期**とよぶ．

以下，$f=f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ がある $T>0$ に対して T-周期であるとする．このとき，任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

が成り立つことを示せ．

解 2つの場合に分けて証明する．

【$a=kT\ (k\in\mathbb{Z})$ **の形の場合**】：この場合，

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

f は T-周期ゆえ，$f(s)=f(s+t)=\cdots=f(s+kT)$ であるから，変数変換 $s=t-kT$ を行うことによって

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(s+kT)\,\mathrm{d}s=\int_o^T f(s)\,\mathrm{d}s.$$

【$a=kT\ (k\in\mathbb{Z})$ **の形をしていない場合**】：この場合，任意の a に対して，以下を満たすただ一つの整数 k が存在する；

$$kT\leqq a<(k+1)T \iff \frac{a}{T}-1<k\leqq\frac{a}{T}.$$

このとき，$a+T\geqq kT+T=(k+1)T$ に注意して，次のように積分区間を分割する．

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t&=\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{kT}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{(k+1)T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t\\&=:\mathrm{(I)}+\mathrm{(II)}+\mathrm{(III)},\end{aligned}$$

ただし，(I), (II), (III) の定義は文脈から明らかである．(I) について最初のケースで見たように，

$$(\mathrm{I}) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(III) に関して，f の周期性を用いて変数変換 $s = t - T$ を行うと

$$(\mathrm{III}) = \int_{(k+1)T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{kT}^{a} f(s+T)\,\mathrm{d}s = \int_{kT}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{kT}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) \\ &= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{kT}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{kT}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

以上より，すべての場合について所望の等式が示された． ■

2 (★★☆)(周期関数と極限)

n を自然数とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left| x^2 \sin nx \right|\,\mathrm{d}x$$

を求めよ．

解 〈〈 **着想のヒント：**$|\sin nx|$ の π/n-周期性に着目して積分区間を細分する 〉〉

$$(\mathrm{I})_n := \int_0^{\pi} \left| x^2 \sin nx \right|\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} x^2 \left|\sin nx\right|\,\mathrm{d}x.$$

ここで，細分した区間 $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$ において，$\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 \leqq x^2 \leqq \left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)^2$ であるから，

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \left|\sin nx\right|\,\mathrm{d}x \leqq (\mathrm{I})_n \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)^2 \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \left|\sin nx\right|\,\mathrm{d}x.$$

$|\sin nx|$ は π/n-周期であるから，$\boxed{\mathbf{1}}$ の結果を用いると，

$$\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin nx| \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/n} |\sin nx| \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/n} \sin nx \,\mathrm{d}x \quad (\because\ \sin nx \geqq 0 \text{ on } [0,\pi/n])$$
$$= \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/n} = \frac{2}{n}.$$

ゆえに，

$$\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 \leqq (\mathrm{I})_n \leqq \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)^2.$$

区分求積法によって

$$\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\int_0^1 (\pi x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}$$

であり，同様に $\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\pi^2}{3}$ であるから，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{I})_n = \boldsymbol{\frac{2\pi^2}{3}}.$$

∎